Meaux le 25 Aout 1883.

Monsieur le Directeur

En m'occupant d'astronomie, l'examen des formules de Kepler et de Newton m'a mis sur la voie pour découvrir les quatre autres qui manquaient à la science et par suite l'équation générale.

J'ai communiqué mes découvertes aux savants. Déjà diverses approbations faisant autorité me sont parvenues, notamment celle de l'académie des sciences d'aix.

Un savant me disait hier: il faut adresser votre travail à l'observatoire de rome —

Ce conseil me procure l'honneur de vous écrire.

Vous reconnaitrez sans doute avec moi

le vice de la forme de la formule de Kepler. J'ai prouvé que cette formule ne pouvait avoir de valeur qu'en la présentant avec le carré des distances.

Veuillez, Monsieur le Directeur agréer ma respectueuse considération.

Jules Greslot
Ancien magistrat.

Lois astronomiques.

Sommaire

Lois sans formules. Lois formulées. Formules de Kepler et de Newton. Transformation de la formule de Kepler. Proportions par puissances. Rapports à chercher. Découvertes. Quatre nouvelles formules. Loi des vitesses des planetes sous ses 3 formes au complet. Compléments des lois de l'attraction et de la durée des révolutions. Complément de la vraie loi des distances. Egalité des rapports entre les éléments. Equation unique ou équations accouplées. Preuves mathématiques. Tableau et traduction des formules. Calculs par puissances. Conclusion.

Exposé.

§. 1er Lois sans formules

Dans le 17e siècle, le fameux astronome allemand Kepler a découvert 3 lois qui portent son nom. Les 2 premières sont celles de la forme des orbites et de la marche des planetes savoir :

1°. Les planetes en tournant autour du soleil décrivent des ellipses dont cet astre occupe l'un des foyers.

2. Les aires ou surfaces décrites par les rayons vecteurs des orbites sont proportionnelles aux temps employés à les parcourir.

La 3e loi de Kepler sera relevée plus loin et traduite avec sa formule transformée.

A la même époque, le célèbre mathématicien anglais Newton découvrait la loi de l'attraction universelle.

3°. La matière attire la matière en raison directe des masses et en raison inverse du carré de la distance.

Appliquée aux planetes attirées par le soleil, elle s'exprime au moyen de la formule qui va suivre.

§ 2. Lois formulées.

Les quatre éléments qui entrent dans les formules sont: l'attraction, la distance, le temps de la révolution et la vitesse des planetes indiqués par les lettres A d T et V pour une planete et par celles ponctuées A_1 d_1 T_1 et V_1 pour une autre.

Le volume des planetes n'étant pas considéré comme un élément, il n'y a pas lieu de s'en préoccuper.

C'est par les rapports entre les éléments, rapports d'un genre spécial, que les lois sont naturellement établies. Deux éléments combinés fournissent une équation ou formule. Trois éléments combinés 2 à 2 produisent seulement 3 formules; mais des combinaisons des quatre éléments 2 à 2, résultent 6 formules, nombre égal à celui des combinaisons possibles.

On ne connait que 2 formules, celle de Newton, et celle de Kepler, nous nous proposons de montrer les quatre autres et de prouver leur certitude.

La combinaison de l'attraction avec la distance produit la fameuse formule de Newton, dite celle du carré des distances $\frac{A}{A_1} = \frac{d_1^2}{d^2}$ (1) qui doit régler tous les rapports.

La distance combinée avec le temps de la révolution procure ou a procuré la formule non moins remarquable de Kepler $\frac{T^2}{T_1^2} = \frac{d_1^3}{d^3}$ (2) dont la forme peu convenable est à changer.

Elles doivent nous aider pour chercher celles qui manquent.

Disons d'abord que toute formule, en termes équivalents, peut prendre une infinité de formes, et qu'une seule forme convient à côté de celle de Newton $\frac{A}{A_1} = \frac{d_1^2}{d^2}$.

L'attraction étant exprimée à la 1ère puissance et la distance à la seconde, il faut absolument que dans les diverses combinaisons de l'attraction, cet élément soit produit à la 1ère puissance, et que pour les diverses combinaisons des distances, le carré des distances soit maintenu. Il faut que l'uniformité du degré de puissance d'un élément existe pour toutes ses combinaisons, au nombre de 3. Nous suivrons cette règle qui l'importe sur toute autre considération.

Les lois sont simples et en harmonie, mais si pour les distances, par exemple, on veut les présenter en même temps avec les carrés et les cubes, comme dans les formules précédentes, c'est commencer par une complication intolérable et l'accord ne s'aperçoit guère. Sans toucher à la belle loi de Kepler, et afin de la faire valoir, je supprimerai donc les cubes des distances, plus qu'inutiles.

Puisque les distances se combinent avec l'attraction et le temps de la révolution, c'est qu'il existe une combinaison pour ces deux derniers éléments, Par induction, il y a lieu de penser que l'élément de la vitesse se combine aussi avec les autres.

Les formules à trouver sont donc :

1° Celle qui règle les rapports de l'attraction avec le temps de la révolution. Probleme 1.

2. Et les 3 formules de la combinaison du mouvemement ou de la vitesse des planetes avec la distance, le temps de la révolution et l'attraction. Problémes 3, 4 et 5.

Les formules des vitesses, principalement la dernière, sont sans doute essentielles à connaitre, parceque la vitesse est une force engendrée par l'attraction et lui faisant constamment équilibre, à tel point que les astres attirés se trouvent ainsi maintenus dans les orbites qu'ils ont à parcourir.

Il faudra aussi trouver l'équation ou les équations qui doivent relier chacun des éléments aux autres. Problémes incidents 2 et 6.

Pour commencer, la 1.ère question à résoudre est celle-ci :

Qu'els sont les rapports établis naturellement entre les attractions des planetes par le soleil et les durées de leurs révolutions?

Solution $\frac{\sqrt[3]{T^4}}{\sqrt[3]{T_1^4}} = \frac{A}{A_1}$

Rapprochées, les équations 1 et 2 indiquent qu'elles peuvent facilement se combiner et servir ainsi pour faire obtenir dabord une troisieme formule.

En effet, l'équation (2) étant $\frac{T^2}{T_1^2} = \frac{d_1}{d} \times \frac{d_1}{d} \times \frac{d_1}{d}$ ou bien $\frac{T^4}{T_1^4} = \frac{d_1^2}{d^2} \times \frac{d_1^2}{d^2} \times \frac{d_1^2}{d^2}$, si dans cette derniere équation, $\frac{d_1^2}{d^2}$ est remplacé par sa valeur $\frac{A}{A_1}$ tirée de l'équation (1)

La substitution procure $\frac{T^4}{T_1^4} = \frac{A}{A_1} \times \frac{A}{A_1} \times \frac{A}{A_1}$ ou $\frac{T^4}{T_1^4} = \frac{A^3}{A_1^3}$

Et par préférence, suivant la règle, $\frac{\sqrt[3]{T^4}}{\sqrt[3]{T_1^4}} = \frac{A}{A_1}$ (3)

La nouvelle formule (3) acquise pour devenir bientôt indispensable, indique dabord que les carrés des temps des révolutions sont éliminés et remplacés par un autre degré de puissance en rapport avec l'attraction 1.ere puissance et par conséquent avec sa valeur, le carré des distances. Ensuite elle fait connaitre les rapports cherchés, c'est-à-dire la loi de la durée des révolutions et encore celle de l'attraction autrement que par les combinaisons des distances.

Elle exprime donc 2 lois à la fois, car il n'y a pas de motifs pour que ce soit plutôt l'une que l'autre. Toute formule a ce mérite et aucune n'est inutile. Tirée des grands théorémes de Kepler et de Newton, elle a le caractére de la certitude. Puisqu'aucun livre ne la relève, on doit la considérer comme étant nouvelle ; en la joignant aux précédentes, elle fournit le moyen de simplifier beaucoup et de continuer les recherches, non sans résultat.

2ème Probleme incident.

Dans les équations $\frac{A}{A_1} = \frac{d_1^2}{d^2}$, $\frac{T_1^2}{T^2} = \frac{d_1^3}{d^3}$ et $\frac{\sqrt[3]{T_1^4}}{\sqrt[3]{T^4}} = \frac{A}{A_1}$ exprimer les distances uniformément par le même degré de puissance et les temps des révolutions aussi.

Solution $\frac{A}{A_1} = \frac{d_1^2}{d^2}$, $\frac{\sqrt[3]{T_1^4}}{\sqrt[3]{T^4}} = \frac{d_1^2}{d^2}$, $\frac{\sqrt[3]{T_1^4}}{\sqrt[3]{T^4}} = \frac{A}{A_1}$

Malgré tout son mérite et sa simplicité relative sans racines, l'équation de Kepler a une forme devenue peu logique, en ce sens que les distances et les durées des révolutions y sont exprimées d'une part comme si cette formule était unique, et d'autre part comme si l'équation de Newton, trouvée après, avait été réglée par la racine carrée du cube des attractions, ce qui sera mis plus loin en évidence, elle empêche ainsi de reconnaître le principal mérite des lois, leur fusion non encore soupçonnée.

Il a été dit que les formules astronomiques peuvent changer de formes. Parmi l'infinité de formes de la formule de Kepler, une seule convient, c'est celle dont les degrés de puissances des éléments se trouvent déterminés par l'équation de Newton $\frac{A}{A_1} = \frac{d_1^2}{d^2}$ qui ne doit pas être transformée.

Or en fonction de l'attraction 1ère puissance ou de $\frac{A}{A_1}$ par ses valeurs $\frac{d_1^2}{d^2}$ et $\frac{\sqrt[3]{T_1^4}}{\sqrt[3]{T^4}}$, La formule primitive de Kepler $\frac{T_1^2}{T^2} = \frac{d_1^3}{d^3}$ ou $\frac{\sqrt[3]{T_1^2}}{\sqrt[3]{T^2}} = \frac{d_1}{d}$

Devient $\frac{\sqrt[3]{T_1^4}}{\sqrt[3]{T^4}} = \frac{d_1^2}{d^2}$ (4)

En éliminant les cubes des distances, la formule (4) exprime les distances au même degré de puissance que celle de Newton suivant la règle, et les temps des révolutions au même degré que la formule (3) du problème 1, aussi conformément à la règle.

Elle s'impose par préférence à l'équation primitive qui laisse dans l'ombre, les rapports établis. Elle s'imposera à l'avenir, non pas seulement à cause de son carré des distances, mais encore parcequ'elle fait voir la corrélation des lois de Kepler et de Newton et un principe fondamental, celui de l'égalité des rapports entre les éléments, par les équations accouplées de 3 membres $\frac{A}{A_1} = \frac{d_1^2}{d^2} = \frac{\sqrt[3]{T_1^4}}{\sqrt[3]{T^4}}$ dans lesquelles sont déjà comprises 3 formules sures.

Nous y reviendrons ou plutôt elles reviendront forcément après la solution des problèmes suivants qui semblent peut être audacieux.

Probleme 3.

Quels sont les rapports naturels entre les distances des planetes et leurs vitesses ?

Solution $\frac{V^2}{V_1^2} = \frac{d_1}{d}$.

Tout le monde peut avoir appris qu'une planete, comparée à une autre, se meut d'autant plus vite, qu'elle est placée moins loin du soleil qui l'attire. Ainsi il y a lieu de penser qu'entre les distances et les vitesses, il existe des rapports précis, en raison inverse, réglés par une proportion mathématique quelconque. On peut donc entreprendre de la découvrir sans avoir recours à l'analyse ou à des procédés scientifiques.

Les chiffres des distances et des vitesses sont donnés par les astronomes. Tels que nous les avons au 1er degré de puissance, ils ne montrent pas leurs relations ni la mystérieuse proportion que nous voulons obtenir. Mais si nous changions la forme des uns ou des autres, et si au lieu de les employer simples ou munis de coëfficients inadmissibles, nous nous servions d'eux mêmes pour en tirer des nouveaux, qu'adviendrait-il?

Divers indices positifs et concordants montrent que cette idée, à la quelle la science doit la belle découverte de la 3e loi de Kepler, peut servir de point de départ.

En effet, l'examen des formules des lois connues fait remarquer que dans celle de Newton $\frac{A}{A_1}=\frac{d_1^2}{d^2}$, l'attraction est à la 1ère puissance, tandis que la distance est à la 2ème. Ainsi les degrés de puissances des éléments combinés diffèrent essentiellement, sans cela pas de rapports, pas de proportion ni de lois.

Pour celle de Kepler $\frac{T_1^2}{T^2}=\frac{d_1^3}{d^3}$, la différence du degré de puissance persiste, et elle est bien marquée, puisque le 1er membre se trouve formé par les temps des révolutions à la 2ème puissance, et le dernier avec les distances à la 3ème ou les cubes, et après les transformations, le degré de puissance de chacun des éléments diffère toujours, comme dans la formule $\frac{\sqrt[3]{T^4}}{\sqrt[3]{T_1^4}}=\frac{d_1^2}{d^2}$ du problème 2.

En outre, le même genre est reproduit pour les combinaisons des attractions et des temps des révolutions (Problème 1) avec la formule $\frac{\sqrt[3]{T^4}}{\sqrt[3]{T_1^4}}=\frac{A}{A_1}$ ou $\frac{T^4}{T_1^4}=\frac{A^3}{A_1^3}$.

Certes, il y a là un principe naturel.

Maintenant on peut déjà, sinon conclure, au moins pressentir que pour toutes autres formules de lois, d'abord celle de la combinaison des vitesses avec les distances, les rapports cherchés doivent aussi être établis en proportions par puissances, et il ne s'agit plus que de tatonner, afin de vérifier ensuite, si les éléments, par les degrés de puissance choisis, sont en relations.

A cet effet, (voir les calculs) j'emploie les chiffres connus des vitesses de 2 planètes quelconques, non pas à la 1ère puissance, mais à la 2ème, et sous cette forme (le carré) je les compare à l'inverse aux distances 1ère puissance, c'est-à dire un degré autre que celui des vitesses. La question qui paraissait si redoutable, est alors résolue, car l'égalité des rapports ainsi obtenus est telle qu'il en sort la 1ère formule, provisoire quant à la forme, de la loi des vitesses $\frac{V^2}{V_1^2}=\frac{d_1}{d}$ portant nécessairement le cachet des formules de Kepler et de Newton.

Cette égalité n'a rien de fortuit puisque c'est la conséquence du principe de proportions par puissances.

Plus loin, la formule $\frac{V^2}{V_1^2}=\frac{d_1}{d}$ devra être démontrée et traduite en même temps que les autres.

Auparavant, il importe de compléter la loi des vitesses, car une formule seule, en deux membres par deux éléments, n'a pas le mérite d'exprimer tous les rapports. Plusieurs existent encore, ils ont été indiqués. Puisque nous sommes sur la voie du procédé, poursuivons.

4ème Problème.

Trouver les rapports établis entre les durées des révolutions et les vitesses des planetes.

Solution $\frac{V^3}{V_1^3} = \frac{T_1}{T}$.

Les chiffres simples apprennent bien que, comparativement à une autre, plus une planete marche rapidement, moins il lui faut de temps pour accomplir sa révolution, mais cette notion ne peut suffire, la proportion précise serait nécessaire.

En changeant la forme des chiffres des vitesses, ils vont nous montrer cette proportion et par conséquent les lois.

Je cherche donc non avec la 1ère puissance des vitesses ni même avec la 2ème déjà prise pour la combinaison des distances, mais au moyen de la 3ème les cubes que j'oppose aux temps des révolutions 1ère puissance à l'inverse, les relations établies (les calculs sont plus loin) sautant alors aux yeux, je retiens cette autre formule provisoire $\frac{V^3}{V_1^3} = \frac{T_1}{T}$

J'ai dit provisoire parceque, par la transformation, le cube des vitesses, ainsi que la 1ère puissance des temps des révolutions devront disparaitre.

5ème Problème

Trouver les rapports qui existent entre les attractions des planetes par le soleil et leurs vitesses.

Solution $\frac{V^4}{V_1^4} = \frac{A}{A_1}$.

Toujours au moyen du même procédé sans doute infaillible, puisqu'il vient de réussir 2 fois, comme il avait anciennement réussi à Kepler, pour découvrir, le premier, une loi formulée, je compare (voir les calculs) la 4e puissance des vitesses à la 1ère des attractions, directement cette fois, parceque les livres enseignent que plus une planete est attirée par le soleil, plus est grande la rapidité de son mouvement de translation. Alors le voile cachant la proportion par puissances tombe. Je trouve en effet la 3e et belle formule (Toutes les formules astronomiques sont réellement belles) de la loi des vitesses des planetes $\frac{V^4}{V_1^4} = \frac{A}{A_1}$ qui restera, par la raison qu'elle est en rapports avec celle de Newton et par conséquent avec toutes les autres ainsi que nous allons bientôt le démontrer.

Observation.

Les 3 formules concernant les vitesses des planetes ont été faciles à trouver, il a suffi pour cela de songer aux puissances et d'employer les carrés, les cubes et les carrés des carrés des vitesses en les opposant comme il convenait à la 1ère puissance des autres éléments; elles sont pourtant nouvelles, aucun livre ne les relève, soit avec l'un des rapports, soit sous une forme, ou transformées. Puisqu'elles complètent les grandes lois de Kepler et de Newton, connues, elles auraient été traduites et expliquées. Ordinairement les vérités de cette importance ne se dissimulent pas. D'ailleurs comme elles montrent l'équation générale qui va suivre, on en aurait certainement fait mention.

6ème Problème incident.

Dans les combinaisons des vitesses, rendre uniforme leur degré de puissance.

Solution $\frac{V^4}{V_1^4}=\frac{d_1^2}{d^2}$, $\frac{V^4}{V_1^4}=\frac{\sqrt[3]{T_1^4}}{\sqrt[3]{T^4}}$, $\frac{V^4}{V_1^4}=\frac{A}{A_1}$.

Le défaut d'uniformité du degré de puissance d'un élément pour les combinaisons et équations a un grave inconvénient, c'est en cachant les corrélations naturellement établies, de faire supposer que les lois astronomiques sont compliquées, tandis que par leur réelle simplicité elles doivent étonner les esprits les plus indifférents. Ainsi sans uniformité il faudrait 3 phrases distinctes pour la traduction des formules primitives des vitesses, et 6 quand il s'agit des 6 formules; avec l'uniformité une seule phrase suffit, et elle n'en est que plus précise.

On a remarqué (Problème 5) que la combinaison des vitesses avec les attractions s'exprime par la formule $\frac{V^4}{V_1^4}=\frac{A}{A_1}$ dont la démonstration sera faite; c'est elle qui doit régler les degrés de puissances. Nous avons appris avec certitude (Problème 2) que les équations accouplées $\frac{A}{A_1}=\frac{d_1^2}{d^2}=\frac{\sqrt[3]{T_1^4}}{\sqrt[3]{T^4}}$ sont exactes. Afin de résoudre le problème posé, il ne s'agit donc que de transformer les 2 premières formules provisoires des vitesses $\frac{V^2}{V_1^2}=\frac{d_1}{d}$ et $\frac{V^3}{V_1^3}=\frac{T_1}{T}$ qui seront aussi démontrées, en fonction de l'attraction 1ère puissance ou de $\frac{A}{A_1}$ par ses valeurs $\frac{d_1^2}{d^2}$ et $\frac{\sqrt[3]{T_1^4}}{\sqrt[3]{T^4}}$.

C'est ainsi que la 1ère $\frac{V^2}{V_1^2}=\frac{d_1}{d}$ devient définitivement $\frac{V^4}{V_1^4}=\frac{d_1^2}{d^2}$

Et que la 2ème $\frac{V^3}{V_1^3}=\frac{T_1}{T}$ ou $\frac{V}{V_1}=\frac{\sqrt[3]{T_1}}{\sqrt[3]{T}}$ devient $\frac{V^4}{V_1^4}=\frac{\sqrt[3]{T_1^4}}{\sqrt[3]{T^4}}$.

On a donc l'équation générale $\frac{V^4}{V_1^4}=\frac{A}{A_1}=\frac{d_1^2}{d^2}=\frac{\sqrt[3]{T_1^4}}{\sqrt[3]{T^4}}$.

Avec un membre ou un élément de plus, c'est celle du Prob. 2 renfermant les 6 formules et tous les éléments sans répétition.

En nous montrant le divin mécanisme sidéral dans toute sa perfection et sa simplicité, elle vient confirmer le principe de l'égalité des rapports, sans lequel l'accord manquerait entre les éléments ou entre les causes et les effets, il n'y aurait pas de lois.

Au moyen de ces équations enfin acquises, on reconnait que les degrés de puissances sont uniformes et pour les 3 combinaisons des vitesses et pour les 3 combinaisons des attractions et pour les 3 combinaisons des temps des révolutions et encore pour celles des distances, aussi au nombre de 3, ce qui est à noter, il y a des motifs.

En fait de lois, dira t-on, il faut la certitude absolue et des preuves autres que par des chiffres?

Eh bien! voici les preuves positives.

Il s'agit d'établir sans nombres que les 3 formules des vitesses $\frac{V^2}{V_1^2}=\frac{d_1}{d}$, $\frac{V^3}{V_1^3}=\frac{T_1}{T}$ et $\frac{V^4}{V_1^4}=\frac{A}{A_1}$ sont aussi certaines que celles de Kepler et de Newton et qu'elles s'appliquent à toutes les planetes grosses ou petites, proches ou éloignées du soleil. Comme les équations $\frac{T_1^2}{T^2}=\frac{d_1^3}{d^3}$ et $\frac{A}{A_1}=\frac{d_1^2}{d^2}$ sont mathématiques, après avoir procuré la formule du problème 1, elles vont encore servir ici pour les démonstrations annoncées.

Preuves.

En considérant l'orbite d'une planete comme une circonférence de cercle; pour la vitesse d'une planete On a l'équation $V=\frac{2\pi d}{T}$ et pour celle d'une autre $V_1=\frac{2\pi d_1}{T_1}$

Division faite, il vient $\frac{V}{V_1}=\frac{d}{d_1}\times\frac{T_1}{T}$ ou $\frac{V}{V_1}\times\frac{d_1}{d}=\frac{T_1}{T}$

Ou bien encore $\frac{V^2}{V_1^2}\times\frac{d_1^2}{d^2}=\frac{T_1^2}{T^2}$.

Et en remplaçant dans cette dernière équation, $\frac{T_1^2}{T^2}$ par sa valeur $\frac{d_1^3}{d^3}$ tirée de la formule de Kepler,

On obtient $\frac{V^2}{V_1^2}\times\frac{d_1^2}{d^2}=\frac{d_1^3}{d^3}$ ou $\frac{V^2}{V_1^2}\times\frac{d_1^2}{d^2}=\frac{d_1^2}{d^2}\times\frac{d_1}{d}$

Et par simplification $\frac{V^2}{V_1^2}=\frac{d_1}{d}$

Ce qui démontre la 1ère formule

Sous d'autres formes elle devient d'abord $\frac{V}{V_1}=\frac{\sqrt{d_1}}{\sqrt{d}}$ ou $\frac{V^3}{V_1^3}=\frac{\sqrt{d_1^3}}{\sqrt{d^3}}$ (1) Et ensuite $\frac{V^4}{V_1^4}=\frac{d_1^2}{d^2}$ (2)

Par substitution de valeurs égales à $\frac{d_1^3}{d^3}$ et à $\frac{d_1^2}{d^2}$ C'est-à dire $\frac{T_1^2}{T^2}$ et $\frac{A}{A_1}$.

L'équation (1) devient $\frac{V^3}{V_1^3}=\frac{\sqrt{T_1^2}}{\sqrt{T^2}}$ ou $\frac{V^3}{V_1^3}=\frac{T_1}{T}$.

Ce qui démontre la 2ème formule.

Et l'équation (2) devient $\frac{V^4}{V_1^4}=\frac{A}{A_1}$

C'est-à dire la 3e formule ainsi démontrée.

De ce que, par les transformations les 2 premières formules des vitesses deviennent $\frac{V^4}{V_1^4}=\frac{d_1^2}{d^2}$ et $\frac{V^4}{V_1^4}=\frac{\sqrt[3]{T_1^4}}{\sqrt[3]{T^4}}$

Et de ce que la 3e est $\frac{V^4}{V_1^4}=\frac{A}{A_1}$, Il résulte que l'équation générale $\frac{V^4}{V_1^4}=\frac{A}{A_1}=\frac{d_1^2}{d^2}=\frac{\sqrt[3]{T_1^4}}{\sqrt[3]{T^4}}$ se trouve également démontrée.

Les preuves étant établies je dresse hardiment le tableau des 6 formules. C'est une nouveauté, puisque 4 nouvelles formules figurent dans ce tableau prouvant que toutes les lois sont connexes, ce qui n'avait pas encore été démontré à défaut de l'élément des vitesses, des combinaisons et des transformations procurant l'équation générale $\frac{A}{A_1}=\frac{d_1^2}{d^2}=\frac{\sqrt[3]{T_1^4}}{\sqrt[3]{T^4}}=\frac{V^4}{V_1^4}$ qui s'impose.

Tableau analytique des formules en fonction de $\frac{A}{A_1}$.

Inventeurs	Formules primitives	Formules transformées	Attraction Distance 1	Temps Distance 2	Vitesse Distance 3	Vitesse Temps 4	Vitesse Attraction 5	Attraction Temps 6
Newton	1. $\frac{A}{A_1}=\frac{d_1^2}{d^2}$		$\frac{A}{A_1}=\frac{d_1^2}{d^2}$	$\frac{T_1^2}{T^2}=\frac{d_1^3}{d^3}$	$\frac{V^2}{V_1^2}=\frac{d_1}{d}$	$\frac{V^3}{V_1^3}=\frac{T_1}{T}$	$\frac{V^4}{V_1^4}=\frac{A}{A_1}$	$\frac{A}{A_1}=\frac{\sqrt[3]{T_1^4}}{\sqrt[3]{T^4}}$
Kepler	2. $\frac{T_1^2}{T^2}=\frac{d_1^3}{d^3}$	$\frac{\sqrt[3]{T_1^4}}{\sqrt[3]{T^4}}=\frac{d_1^2}{d^2}$		ou $\frac{\sqrt[3]{T_1^2}}{\sqrt[3]{T^2}}=\frac{d_1}{d}$		ou $\frac{V}{V_1}=\frac{\sqrt[3]{T_1}}{\sqrt[3]{T}}$		
Greslot	3. $\frac{V^2}{V_1^2}=\frac{d_1}{d}$	$\frac{V^4}{V_1^4}=\frac{d_1^2}{d^2}$		ou	ou	ou		
id.	4. $\frac{V^3}{V_1^3}=\frac{T_1}{T}$	$\frac{V^4}{V_1^4}=\frac{\sqrt[3]{T_1^4}}{\sqrt[3]{T^4}}$	$\frac{A}{A_1}=\frac{d_1^2}{d^2}=$	$\frac{\sqrt[3]{T_1^4}}{\sqrt[3]{T^4}}=\frac{d_1^2}{d^2}=$	$\frac{V^4}{V_1^4}=\frac{d_1^2}{d^2}=$	$\frac{V^4}{V_1^4}=\frac{\sqrt[3]{T_1^4}}{\sqrt[3]{T^4}}=$	$\frac{V^4}{V_1^4}=\frac{A}{A_1}=$	$\frac{A}{A_1}=\frac{\sqrt[3]{T_1^4}}{\sqrt[3]{T^4}}$
id.	5. $\frac{V^4}{V_1^4}=\frac{A}{A_1}$							
id.	6. $\frac{A}{A_1}=\frac{\sqrt[3]{T_1^4}}{\sqrt[3]{T^4}}$							

Résultat

Unique 1.2.3.4.5.6	Attractions 1.5.6.	Distances 1.2.3.	Temps 2.4.6.	Vitesses 3.4.5	Lois
$\frac{A}{A_1}=\frac{d_1^2}{d^2}=\frac{\sqrt[3]{T_1^4}}{\sqrt[3]{T^4}}=\frac{V^4}{V_1^4}$	$\frac{A}{A_1}$ =	$\frac{d_1^2}{d^2}$ =	$\frac{\sqrt[3]{T_1^4}}{\sqrt[3]{T^4}}$ =	$\frac{V^4}{V_1^4}$	Attraction $\frac{A}{A_1}=\frac{d_1^2}{d^2}=\frac{\sqrt[3]{T_1^4}}{\sqrt[3]{T^4}}=\frac{V^4}{V_1^4}$ Distance $\frac{d_1^2}{d^2}=\frac{\sqrt[3]{T_1^4}}{\sqrt[3]{T^4}}=\frac{V^4}{V_1^4}=\frac{A}{A_1}$ Temps $\frac{\sqrt[3]{T_1^4}}{\sqrt[3]{T^4}}=\frac{V^4}{V_1^4}=\frac{A}{A_1}=\frac{d_1^2}{d^2}$ Vitesse $\frac{V^4}{V_1^4}=\frac{A}{A_1}=\frac{d_1^2}{d^2}=\frac{\sqrt[3]{T_1^4}}{\sqrt[3]{T^4}}$

La nécessité de l'uniformité du degré de puissance d'un élément apparait dans ce tableau. L'uniformité a pour effet de produire l'équation générale de 4 membres, nombre limité à celui des éléments combinés et renfermant les 12 membres sans liens apparents avant la transformation, tandis qu'ils sont tous égaux après. La fusion devient manifeste. On voit que les lois dérivent l'une de l'autre, qu'elles sont en harmonie et s'enchainent comme si elles n'en formaient qu'une seule. En exprimant une loi avec cette formule on les exprime toutes ensemble.

Est-ce que la vraie loi des distances, si longtemps méconnue ne prendrait pas son rang avec toute son évidence dans notre tableau? Elle est en proportions par puissances, seul genre possible, sous les 3 formes sans coëfficients, et il n'y en a pas d'autre à part par approximation, en progressions simples ou multiples comme on l'avait cru sans preuves et contrairement aux principes. Kepler avec sa formule $\frac{T_1^2}{T^2}=\frac{d_1^3}{d^3}$ ou plutôt $\frac{\sqrt[3]{T_1^4}}{\sqrt[3]{T^4}}=\frac{d_1^2}{d^2}$ l'a montrée sous une forme et Newton aussi par son équation $\frac{A}{A_1}=\frac{d_1^2}{d^2}$. Notre formule $\frac{V^4}{V_1^4}=\frac{d_1^2}{d^2}$ exprimant 2 lois à la fois, sans que ce soit plutôt celle des vitesses que celle des distances, indique la 3e forme: Certes, il n'y en a pas plus.

C'est donc à tort que la loi de fantaisie, dite celle de Bode, qui ne se rattache à aucune, par la raison qu'elle n'existe pas, a pris la place des lois de Kepler et de Newton: Celles là ainsi que celles de la formule $\frac{V^4}{V_1^4}=\frac{d_1^2}{d^2}$ sont naturelles et autrement établies que par l'arithmétique.

Il est temps de traduire les formules du tableau.

Lois.

Traduction des formules.

Formules.

1er mode sans transformation.

§. 1er Lois de Newton et de Kepler.

1. $\frac{A}{A_1}=\frac{d_1^2}{d^2}$ Les attractions de 2 planetes par le soleil sont en raison inverse des carrés des distances.

2. $\frac{T_1^2}{T^2}=\frac{d_1^3}{d^3}$ Les carrés des temps des révolutions de 2 planetes autour du soleil sont entr'eux comme les cubes des distances. (à transformer)

§. 2. Lois trouvées en 1881 et 1882 par J. Greslot.

3. $\frac{V^2}{V_1^2}=\frac{d_1}{d}$ Les carrés des vitesses de 2 planetes sont en raison inverse de leurs distances au soleil. (à transformer)

4. $\frac{V^3}{V_1^3}=\frac{T_1}{T}$ Les cubes des vitesses de 2 planetes sont en raison inverse des temps des révolutions. (à transformer)

5. $\frac{V^4}{V_1^4}=\frac{A}{A_1}$ Les carrés des carrés des vitesses de 2 planetes sont entr'eux comme leurs attractions par le soleil.

6. $\frac{A}{A_1}=\frac{\sqrt[3]{T_1^4}}{\sqrt[3]{T^4}}$ Les attractions de 2 planetes par le soleil sont en raison inverse des racines cubiques des carrés des carrés des temps des révolutions.

2e mode préférable au 1er

§. 1er Lois Connues.

1. $\frac{A}{A_1}=\frac{d_1^2}{d^2}$ Les attractions de 2 planetes par le soleil sont en raison inverse des carrés des distances. (Newton)

2. $\frac{\sqrt[3]{T_1^4}}{\sqrt[3]{T^4}}=\frac{d_1^2}{d^2}$ Les racines cubiques des carrés des carrés des temps des révolutions de 2 planetes autour du soleil sont entr'elles comme les carrés des distances. (Kepler après transformation)

Formules

§. 2e Lois trouvées en 1881 et 1882.

3. $\frac{V^4}{V_1^4}=\frac{d_1^2}{d^2}$ Les carrés des carrés des vitesses de 2 planetes sont en raison inverse des carrés de leurs distances.

4. $\frac{V^4}{V_1^4}=\frac{\sqrt[3]{T_1^4}}{\sqrt[3]{T^4}}$ Les carrés des carrés des vitesses de 2 planetes sont en raison inverse des racines cubiques des carrés des carrés des temps des révolutions.

5. $\frac{V^4}{V_1^4}=\frac{A}{A_1}$ Les carrés des carrés des vitesses de 2 planetes sont en raison directe de leurs attractions par le soleil.

6. $\frac{A}{A_1}=\frac{\sqrt[3]{T_1^4}}{\sqrt[3]{T^4}}$ Les attractions de 2 planetes par le soleil sont en raison inverse des racines cubiques des carrés des carrés des temps des révolutions.

C'est-à-dire par une seule phrase, à cause de l'égalité des rapports, suivant la formule générale $\frac{A}{A_1}=\frac{d_1^2}{d^2}=\frac{\sqrt[3]{T_1^4}}{\sqrt[3]{T^4}}=\frac{V^4}{V_1^4}$ qui montre le système dans son ensemble:

= Les attractions des planetes par le soleil s'exercent
= en raison inverse des carrés des distances et des
= racines cubiques des carrés des carrés des temps des
= révolutions et en raison directe des carrés des carrés
= des vitesses. "

Comme les autres, la formule générale est susceptible d'un nombre infini de formes, celle qui précède étant en fonction de l'attraction 1ère puissance, renferme l'équation de Newton sans transformation, par ce motif, elle convient mieux, exemple.

	Attraction		Dist^ce		Temps		Vitesse
1. Attraction 1^re puis^ce (Newton)	$\frac{A}{A_1}$	=	$\frac{d_1^2}{d^2}$	=	$\frac{\sqrt[3]{T_1^4}}{\sqrt[3]{T^4}}$	=	$\frac{V^4}{V_1^4}$
2. Distance id	$\frac{\sqrt{A}}{\sqrt{A_1}}$	=	$\frac{d_1}{d}$	=	$\frac{\sqrt[3]{T_1^2}}{\sqrt[3]{T^2}}$	=	$\frac{V^2}{V_1^2}$
3. Temps id	$\frac{\sqrt[4]{A^3}}{\sqrt[4]{A_1^3}}$	=	$\frac{\sqrt{d_1^3}}{\sqrt{d^3}}$	=	$\frac{T_1}{T}$	=	$\frac{V^3}{V_1^3}$
4. Vitesse id	$\frac{\sqrt[4]{A}}{\sqrt[4]{A_1}}$	=	$\frac{\sqrt{d_1}}{\sqrt{d}}$	=	$\frac{\sqrt[3]{T_1}}{\sqrt[3]{T}}$	=	$\frac{V}{V_1}$
5. Distance 3^e puis^ce (Kepler)	$\frac{\sqrt{A^3}}{\sqrt{A_1^3}}$	=	$\frac{d_1^3}{d^3}$	=	$\frac{T_1^2}{T^2}$	=	$\frac{V^6}{V_1^6}$
6. Attraction id sans racines	$\frac{A^3}{A_1^3}$	=	$\frac{d_1^6}{d^6}$	=	$\frac{T_1^4}{T^4}$	=	$\frac{V^{12}}{V_1^{12}}$.

Ce tableau fait voir qu'il était nécessaire de transformer au moins l'une des équations primitives de Kepler et de Newton, la première principalement, puisqu'elles n'entrent pas ensemble dans une formule et qu'un élément au même degré de puissance ne peut figurer plus d'une fois dans les formules diverses.

On doit remarquer (N° 5) que la formule primitive de Kepler, accouplée avec celle de Newton, ferait présenter cette dernière sous la forme de $\frac{\sqrt{A^3}}{\sqrt{A_1^3}} = \frac{d_1^3}{d^3}$, forme qui n'est pas acceptable.

Supprimez maintenant la transformation l'accouplement des équations devient impossible et leur fusion aussi, alors l'œuvre si parfaite de la nature reste inaperçue ou paraît difforme.

Calculs par puissances

Loi des vitesses.

Comme plustôt, l'équation auxiliaire $\frac{V}{V_1} = \frac{d_1}{d_1} \times \frac{T_1}{T}$ trouvée et employée pour les démonstrations aurait fait découvrir sans chiffres les 3 formules des vitesses $\frac{V^2}{V_1^2} = \frac{d_1}{d}$, $\frac{V^3}{V_1^3} = \frac{T_1}{T}$ et $\frac{V^4}{V_1^4} = \frac{A}{A_1}$.

A défaut de cette équation en temps utile voici les chiffres qui ont servi :

Soient 2 planètes quelconques dont les distances connues sont en nombres ronds :

La terre 146.694.000 kilomètres

Neptune 4.406.000.000 kilomètres

Les vitesses par seconde 29.320 mètres et 5.351 mètres.

Et les durées des révolutions 1 an et 164 ans 6 dixièmes.

Pour la terre

Le carré de la vitesse est $(29.320)^2$ = 859.662.400

Le cube $(29.320)^3$ = 25.205.301.568.000

Le carré du carré $(859.662.400)^2$ = 739.019.441.973.760.000

Pour Neptune

Le carré de la vitesse est $(5.351)^2$ = 28.633.201

Le cube $(5351)^3$ = 153.216.258.551

Le carré du carré $(28.633.201)^2$ = 819.863.099.406.401

Rapports

Carrés des vitesses. **Distances 1ère puissance à l'inverse**

Terre / Neptune $\frac{859.662.400}{28.663.201} = 30,03$ Neptune / Terre $\frac{4.406.000.000}{146.694.000} = 30,03$

Puisque les rapports sont égaux, on a la 1ère formule $\frac{V^2}{V_1^2} = \frac{d_1}{d}$

Cubes des vitesses. **Temps des révolutions à l'inverse**

Terre / Neptune $\frac{25.205.301.558.000}{153.216.248.551} = 164,6$ Neptune / Terre $\frac{164,6}{1} = 164,6$

L'égalité des rapports procure la 2e formule $\frac{V^3}{V_1^3} = \frac{T_1}{T}$

Attractions.

L'attraction de Neptune par le soleil étant 1
Celle de la terre, placée 30 fois (30,03) plus près du soleil, doit être, suivant la loi de l'attraction de Newton $(30,03)^2 = 30,03 \times 30,03 = 902$ en nombres entiers

Rapports

Carrés des carrés (4e puissance) des vitesses **Attractions**

Terre / Neptune $\frac{739.019.441.973.760.000}{819.663.099.506.401} = 902$ en nombres entiers Terre / Neptune $\frac{902}{1} = 902$

De l'égalité des rapports résulte la 3e formule $\frac{V^4}{V_1^4} = \frac{A}{A_1}$.

Appliqués à d'autres planetes ou à d'autres combinaisons les calculs produisent des résultats identiques.

Conclusion.

Quatre nouvelles formules sures, la loi des vitesses des planetes dévoilée et l'égalité des rapports entre les éléments démontrée par l'équation générale $\frac{A}{A_1} = \frac{d_1^2}{d^2} = \frac{\sqrt[3]{T_1^4}}{\sqrt[3]{T^4}} = \frac{V^4}{V_1^4}$ résultant des transformations doivent rendre les notions astronomiques plus complètes et plus précises qu'avant 1881.

Au moyen des 6 formules s'enchainant au point de n'en former qu'une seule, les lois se trouvent nécessairement présentées d'une manière simple et bien moins compliquée que précédemment.

Jules Greslot

Meaux le 25 Aout 1883