

PUBBLICAZIONI  
DELL'ISTITUTO NAZIONALE DI GEOFISICA  
DEL CONSIGLIO NAZIONALE DELLE RICERCHE  
diretto dal prof. ANTONINO LO SURDO Accademico d'Italia

---

N. 74

GILBERTO BERNARDINI - MARCELLO CONVERSI  
ETTORE PANCINI - GIAN CARLO WICK

Sull'eccesso  
positivo della radiazione cosmica

ROMA  
ANNO MCMXLI-XX

ESTRATTO DA "LA RICERCA SCIENTIFICA"

ANNO 12° - N. 12 - DICEMBRE 1941 - XX, pag. 1227

**Riassunto:** Viene descritto un metodo semplice per lo studio dell'eccesso positivo. L'apparecchio descritto può venire impiegato anche per ricerche nell'alta atmosfera. I risultati ottenuti a Roma e Cervinia mostrano le possibilità del metodo e confermano l'esistenza di un eccesso positivo dell'ordine del 20 %.

1. - Alcuni anni fa Rossi <sup>(1)</sup> e Mott-Smith <sup>(2)</sup> cercarono di osservare per mezzo di contatori in coincidenza la deflessione di corpuscoli cosmici nel campo di nuclei di ferro magnetizzati. Le esperienze di Mott-Smith diedero esito negativo; quelle di Rossi, eseguite in parte con un metodo diverso, usando coincidenze doppie, diedero un'indicazione un po' incerta di un lieve effetto, il cui segno corrispondeva alla presenza di particelle positive (\*).

Le ricerche eseguite successivamente col metodo più perfezionato della camera di Wilson controllata da contatori <sup>(4)</sup> diedero in un primo tempo completamente ragione di questi risultati negativi mostrando come, al livello del mare, la radiazione cosmica fosse costituita da corpuscoli positivi e negativi in numero pressochè uguale e ripartiti in modo simile rispetto all'energia.

Recentemente tuttavia Leprince-Ringuet e Crussard <sup>(5)</sup>, e soprattutto Jones <sup>(6)</sup> e Hughes <sup>(7)</sup> hanno trovato che la simmetria dello spettro della componente mesonica rispetto al segno delle cariche non era completa; Jones e Hughes trovano un eccesso nel numero delle particelle positive intorno al 20 %.

L'esistenza di questo eccesso positivo presenta un grande interesse; esso rappresenterebbe un residuo di quella dissimmetria, che gli effetti azimutali mettono in evidenza nella radiazione primaria. Uno studio ulteriore dell'eccesso positivo sembra quindi desiderabile sotto vari aspetti: *a*) i risultati di Jones e Hughes non sono in completo accordo con quelli precedenti di Blackett <sup>(4)</sup>; *b*) una valutazione quantitativa dell'effetto prevedibile nell'esperienza di Rossi (vedi in seguito) mostra che la piccolezza degli effetti osservati non è d'accordo con un eccesso positivo del 20 %; *c*) sarebbe interessante estendere lo studio dell'eccesso positivo all'alta atmosfera. La tecnica della camera di Wilson, oltre ad essere estremamente laboriosa, presenta gravi limiti d'impiego, dovuti al peso e alla complicazione degli apparecchi. Già coi pesanti magneti che si possono impiegare solo in laboratorio, la camera di Wilson dà informazioni veramente attendibili solo

---

(\*) Il valor medio del campo magnetico microscopico in un mezzo materiale è uguale notoriamente al vettore induzione  $B$ . Si è cercato di spiegare l'esito negativo delle esperienze di Mott-Smith e Rossi, ammettendo che il campo effettivo che agisce sulle particelle cosmiche nel ferro non fosse  $B$ , ma un campo assai minore (per esempio  $H$ ). Tale ipotesi è però stata abbandonata <sup>(3)</sup>; calcoleremo quindi la deflessione delle particelle del ferro in base al valore di  $B$ .

sulle particelle aventi un'energia  $< 3 \cdot 10^9$  e.v., con magneti più leggeri si possono studiare solo i mesoni lenti.

Ci è sembrato dunque di un certo interesse riprendere le esperienze coi contatori, modificando l'apparecchio usato da Rossi, in modo da far uso di coincidenze triple anziché doppie, e introducendo quei perfezionamenti, che i recenti progressi della tecnica dei contatori consentono (contatori ad argon e alcool, elevato potere risolutivo, ecc. ...). E' possibile che nelle esperienze anteriori il numero relativamente elevato delle coincidenze casuali abbia in parte mascherato l'effetto dell'eccesso positivo.

I risultati sperimentali che presentiamo in questa nota mostrano che col nostro apparecchio la dissimetria dello spettro rispetto al segno delle particelle si fa sentire nettamente, dando luogo a effetti sino al 15 %. Ci sembra quindi giustificata la conclusione che l'apparecchio si presti a uno studio non soltanto qualitativo dell'eccesso positivo nell'alta atmosfera.

Le questioni intorno alla relazione tra l'effetto osservato sperimentalmente e il valore dell'eccesso positivo (come anche alcune questioni più fini circa la ripartizione dell'eccesso positivo fra le varie parti dello spettro) sono un po' delicate e verranno discusse quantitativamente a paragrafo 4. Alcune semplici considerazioni sono però opportune sin d'ora.

Il nostro apparecchio (vedi § 2) consta di un sistema telescopico di tre contatori in coincidenza, con interposte quattro lastre di ferro magnetizzate che agiscono, grosso modo, come una lente cilindrica (\*) convergente o divergente a seconda del segno delle particelle e del verso del campo magnetico. Il principio dell'esperienza consiste nell'osservare la differenza esistente tra il numero  $N_1$  delle coincidenze, per ora, contate quando la « lente » è convergente per le particelle positive e divergente per le negative, e il numero  $N_2$  delle coincidenze registrate quando la lente è convergente per le particelle negative (\*\*). L'effetto è espresso dunque dal rapporto:

$$\delta = 2 \frac{N_1 - N_2}{N_1 + N_2} \quad [1]$$

Se l'azione delle lastre magnetizzate fosse così forte da escludere addirittura dal conteggio le particelle di un segno, il rapporto  $N_1/N_2$  si potrebbe ritenere uguale al rapporto tra il numero delle particelle positive e quello delle negative (\*\*\*) ; l'effetto  $\delta$  sarebbe senz'altro uguale all'eccesso positivo. In realtà non è così; lo spettro contiene particelle di energia tale, da poter produrre coincidenze, con qualunque segno della carica, anche coi valori più elevati del campo ( $B \approx 15\,000$  gauss).

L'effetto  $\delta$  che si osserva è dunque minore dell'eccesso positivo. Esso deve però essere dello stesso ordine di grandezza (con un  $B$  elevato). Infatti: nel nostro apparecchio la distanza  $2d$  tra gli assi dei contatori estremi è di 40 cm, mentre il diametro  $2r$  è di 2 cm, dimodochè la definizione angolare del sistema telescopico (nel piano ortogonale agli assi dei contatori)

(\*) Non si tratta di una vera lente, nel senso dell'ottica elettronica, cioè capace di formare immagini.

(\*\*) Da un caso all'altro si passa semplicemente invertendo il senso della corrente che magnetizza le lastre.

(\*\*\*) Così ragionando supponiamo che gli spettri energetici delle particelle positive e negative siano simili, in modo che le particelle dei due segni subiscano in ugual misura l'azione della lente (vedi anche § 4 e 5).

è  $\propto \frac{r}{d} = 1/20$ ; consideriamo una particella che si muova in un piano ortogonale agli assi dei contatori, e sia  $\varrho^{-1}$  la curvatura (della traiettoria) prodotta dal campo magnetico delle lastre; la deflessione angolare che subisce la particella è dunque dell'ordine di  $\frac{2d}{\varrho}$ ; poniamo:

$$\sigma = \frac{r \varrho}{d^2} \quad ; \quad [2]$$

la variazione che subisce, per effetto del campo magnetico, il numero delle particelle di una data energia e segno, registrato dall'apparecchio, è in valore relativo dell'ordine del rapporto tra la deflessione angolare che abbiamo detto e la definizione angolare del sistema telescopico, ossia è  $\propto \pm \frac{1}{\sigma}$  (a seconda del segno della particella). Per le particelle di  $3 \cdot 10^9$  eV con  $B = 15\,000$  gauss, si ha:  $\varrho = 6,7$  m ossia una variazione (nel numero delle particelle contate) dell'ordine di grandezza del 60%. (Ciò è confermato dai calcoli più esatti di paragrafo 4). Poichè più del 70% delle particelle hanno un'energia inferiore a  $3 \cdot 10^9$  eV, ne risulta che l'effetto  $\delta$  è probabilmente abbastanza vicino al valore vero dell'eccesso positivo.

Come si vede, il metodo delle coincidenze è sensibile a curvature dello stesso ordine di quelle raggiunte con la camera di Wilson. Volendo stabilire un confronto tra i due diversi tipi di apparecchio, è bene tener presente che nella camera di Wilson il limite di sensibilità verso le alte energie non è imposto dalla difficoltà di misurare piccolissime curvature, ma piuttosto dalle curvature spurie non piccolissime prodotte da movimenti irregolari dell'aria. Nel nostro caso questa causa d'errore non esiste, ma al suo posto subentra in un certo senso la diffusione nel ferro delle lastre magnetizzate.

Anche la diffusione produce una curvatura (irregolare) spuria delle traiettorie, e tende così ad attenuare gli effetti del campo magnetico. E' però probabile che l'azione della «lente» convergente o divergente non venga molto alterata dalla diffusione (\*); in ogni caso è da notarsi che, a

(\*) L'ordine di grandezza delle curvature spurie dovute alla diffusione si può valutare mediante le formule di Williams (8), che danno la deflessione media  $\bar{\alpha}$  che una particella subisce nell'attraversare una lastra di spessore  $t$ , costituita da un mezzo di numero atomico  $Z$ , densità  $\varrho$ , peso atomico  $A$ . Considerando per semplicità una direzione di incidenza contenuta in un piano normale agli assi dei contatori, e chiamando  $\alpha$  la componente della deflessione nel piano ora detto (è la componente della deflessione che maggiormente interessa, poichè si sovrappone alla deflessione dovuta al campo magnetico) si ha secondo Williams:

$$\bar{\alpha} \propto \frac{600 Z e \sqrt{N t}}{E \beta} \left( 3,7 + 0,28 \text{Log}_{10} \frac{Z^{1/3} \varrho t}{W \beta^2} \right)$$

dove  $E$  è l'energia della particella in e-Volt,  $\beta c$  la sua velocità ( $\beta \propto 1$ ), e  $N$  è il numero degli atomi del mezzo per  $\text{cm}^3$ . Nel ferro e per  $t = 20 \div 40$  cm si trova

$$\bar{\alpha} \propto \sqrt{t} \frac{10^7 \text{ eV}}{E}$$

La deflessione che produce il campo magnetico è invece:  $\vartheta = \frac{300 B t}{E}$  che, per  $B = 15\,000$  gauss, diventa  $\vartheta = \frac{4,5 \cdot 10^6 \text{ eV}}{E} t$ . Ponendo  $t = 40$  cm, si vede che

$\vartheta$  è ca. 3 volte più grande di  $\bar{\alpha}$  (indipendentemente dall'energia).

differenza da quel che avviene nella camera di Wilson, le curvature spurie variano in ragione inversa della energia delle particelle; ciò fa pensare che il limite di sensibilità alle grandi energie sia più alto col metodo delle coincidenze che non con la camera di Wilson. Di questo non abbiamo però nessuna conferma diretta.

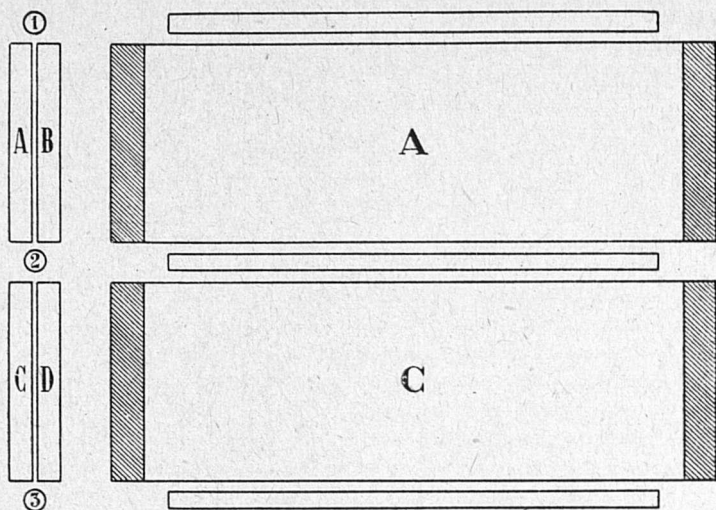


Fig. 1

2. - DESCRIZIONE DEL METODO. — L'apparecchio usato (fig. 1) consta anzitutto di un «telescopio» verticale di tre contatori in coincidenza. I contatori, chiusi in vetro saldato e riempiti con la miscela di Trost <sup>(9)</sup> hanno un diametro di 2 cm e una lunghezza efficace di 50 cm; la distanza  $d$  tra l'asse del contatore intermedio 2 e l'asse del contatore inferiore 3 (o rispettivamente superiore 1) è di 20 cm.

Le due lastre di ferro dell'esperienza di Rossi sono qui sostituite dalle quattro



Fig. 2

lastre  $A, B, C, D$  di 50 cm di lunghezza (parallelamente agli assi dei contatori) e sezione  $20 \times 2,6$  cm<sup>2</sup>, magnetizzate a mezzo dei due avvolgimenti in serie  $a_1, a_2$  disposti nel modo indicato in fig. 2, che mostra una delle due coppie  $A-B$  o  $C-D$ , vista dall'alto.

Le quattro lastre non agiscono in modo sensibilmente diverso dalle due di Rossi, poichè  $A$  è magnetizzata parallelamente a  $C$  e  $B$  parallelamente a  $D$ .  $A$  e  $C$  sono magnetizzate in senso opposto a  $B$  e  $D$ , dimodochè le lastre agiscono, come già si è detto, da « lente » convergente per le particelle di un segno, divergente per le particelle dell'altro segno (\*).

(\*) Nulla vieta naturalmente di magnetizzare la coppia di lastre inferiore nel senso opposto a quello della coppia superiore: il sistema si può allora paragonare, sempre grossolanamente, ad una coppia di lenti cilindriche, la prima convergente e la seconda divergente (o viceversa

L'andamento delle traiettorie delle particelle dei due segni è indicato schematicamente in figura 3 dalle traiettorie  $\alpha$  o rispettivamente  $\beta$ . La  $\alpha_2$  rappresenta per esempio una particella molle, la cui traiettoria si incurva maggiormente verso la fine a causa del frenamento. La particella non viene registrata perchè non attraversa il contatore mediano.

3. - RISULTATI SPERIMENTALI. — La registrazione delle coincidenze permetteva il conteggio simultaneo delle coincidenze triple con le coincidenze doppie, tra una qualsiasi delle coppie 1, 2; 2, 3; 1, 3.

Durante lo svolgersi dell'esperienza furono quasi sempre contate le doppie fra 1 e 2 in modo da ripetere contemporaneamente, come controllo, una delle misure di Rossi.

Le misure furono effettuate alternando sistematicamente, ogni ora ca, la direzione dei campi nei nuclei di ferro in modo da concentrare ora le particelle positive ora le negative. Le misure vennero ripetute con diversi valori del campo magnetico.

Il valore « effettivo » del campo, ossia del vettore induzione  $B$  (\*) fu determinato a mezzo di un flussometro, connesso con delle spire di prova direttamente avvolte sui nuclei di ferro.

Una serie di misure fu eseguita nell'Istituto di fisica dell'Università di Roma (\*\*); una seconda serie a Pian Rosà (Cervinia) a 3460 m s.l.d.m. in una capanna di legno.

I risultati sono dati dalla seguente tabella:

B (gauss)	$N_1$	$N_2$	$N_1'$	$N_2'$	$\delta$	$\delta'$
<b>a ROMA</b>						
$2,4 \times 10^3$	$81,1 \pm 1,2$	$77,7 \pm 1,2$	$235,4 \pm 2,4$	$234,4 \pm 2,3$	$0,043 \pm 0,021$	$0,004 \pm 0,014$
5,0 . . . .	$83,1 \pm 1,2$	$77,2 \pm 1,1$	$243,6 \pm 2,4$	$235,7 \pm 2,3$	$0,074 \pm 0,020$	$0,033 \pm 0,014$
10,4 . . . .	$88,5 \pm 0,9$	$80,5 \pm 0,9$	$245,2 \pm 1,9$	$236,2 \pm 1,8$	$0,095 \pm 0,015$	$0,037 \pm 0,011$
15,5 . . . .	$97,5 \pm 1,0$	$84,7 \pm 0,9$	$253,7 \pm 2,0$	$242,3 \pm 1,9$	$0,140 \pm 0,015$	$0,046 \pm 0,011$
17,0 . . . .	$103,3 \pm 1,5$	$91,2 \pm 1,3$	$260,2 \pm 2,8$	$250,5 \pm 2,5$	$0,124 \pm 0,020$	$0,038 \pm 0,015$
<b>a CERVINIA</b>						
2,4 . . . .	$177 \pm 2,1$	$175 \pm 2,2$	$615 \pm 8,0$	$601 \pm 8,0$	$0,011 \pm 0,017$	$0,023 \pm 0,019$
5,0 . . . .	$180,5 \pm 2,5$	$172 \pm 2,5$	$597 \pm 9,5$	$589 \pm 9,5$	$0,048 \pm 0,020$	$0,013 \pm 0,023$
10,4 . . . .	$190,5 \pm 2,1$	$174,5 \pm 2,0$	$609 \pm 4,5$	$583 \pm 4,5$	$0,088 \pm 0,016$	$0,044 \times 0,011$
15,5 . . . .	$221 \pm 1,8$	$191 \pm 2,0$	$664 \pm 4,0$	$624 \pm 4,0$	$0,146 \pm 0,013$	$0,062 \pm 0,009$
17,0 . . . .	$233 \pm 2,7$	$200 \pm 2,9$	$678 \pm 7,5$	$631 \pm 7,5$	$0,152 \pm 0,018$	$0,072 \pm 0,016$

Nella 2<sup>a</sup> e 3<sup>a</sup> colonna sono riportate le coincidenze triple  $N_1$  e  $N_2$  (vedi § 1). Nella 4<sup>a</sup> e 5<sup>a</sup> colonna le coincidenze doppio  $N_1'$  e  $N_2'$  tra gli impulsi dei due contatori superiori ( $N_1'$ , analogamente come  $N_1$ , quando le lastre  $A$  e  $B$  fanno da « lente » convergente per le particelle positive;  $N_2'$  analogamente come  $N_2$ ).

Nella 6<sup>a</sup> colonna è dato l'effetto  $\delta$  (vedi equazione [1]) calcolato per le coincidenze triple;  $\delta'$  è analogamente l'effetto calcolato per le doppie (7<sup>a</sup> colonna).

A rigore, prima di calcolare  $\delta$  (o  $\delta'$ ) bisognerebbe sottrarre dalle coincidenze a seconda del segno delle particelle). Questa disposizione, non interessante nello studio dell'eccesso positivo, può invece servire per una analisi dello spettro energetico, analisi naturalmente molto più grossolana di quella permessa dalla camera di Wilson, ma in compenso assai meno laboriosa. Risultati così ottenuti verranno esposti in un altro lavoro.

(\*) Vedi nota a pag. 1.

(\*\*) Lo spessore di muratura soprastante era di ca 50 g/cm<sup>2</sup>.

triple l'effetto degli sciami. Questo è stato valutato al solito modo, spostando cioè orizzontalmente il contatore più alto fuori dell'angolo solido sotteso dagli altri due contatori. In queste due condizioni sono state contate

$14,5 \pm 0,7$  coinc/ora a Cervinia

$2,16 \pm 0,16$  » a Roma

senza riscontrare alcuna differenza sensibile nel numero delle coincidenze al variare del senso della corrente magnetizzante (\*). Naturalmente spostando il contatore superiore si altera l'azione del campo magnetico sugli sciami; comunque i dati ora detti mostrano che la correzione per gli sciami non è importante (bisogna osservare che essa non influisce, come ora si è visto, sul numeratore  $N_1 - N_2$  della formula che dà  $\delta$ , ma solo sul denominatore  $N_1 + N_2$ ). Perciò i valori di  $\delta$  e  $\delta'$  nella tabella non sono stati corretti per gli sciami.

La correzione per le coincidenze casuali è trascurabile nel caso delle triple; le doppie casuali erano ca 40/ora sia a Cervinia che a Roma (\*\*). Le doppie casuali sono già detratte dalle doppie riportate in tabella.

Nelle figure 4 e 5 sono riportati in funzione di  $B$  i valori di  $\delta$  e  $\delta'$  trovati a Roma e Cervinia. L'effetto per le coincidenze doppie è come si vede considerevolmente più piccolo di quello per le triple. Ciò è in accordo con le considerazioni a paragrafo 1, secondo le quali l'effetto  $\delta$  deve variare, grosso modo, come il quadrato della distanza tra i contatori estremi; esso dovrebbe quindi essere ca 4 volte più piccolo per le doppie (tra i due contatori superiori) che per le triple. Il valore dell'effetto in coincidenze doppie trovato a Roma è in accordo con quello trovato da Rossi con un apparecchio avente una geometria simile alla nostra, ma con una distanza  $d$  tra i contatori estremi un po' minore.

Esaminando ora le coincidenze triple, che danno un effetto assai più sicuro, vediamo che i risultati di Roma e Cervinia sono molto simili, il che indica che non vi è sensibile variazione nello eccesso positivo sino a 3500 m d'altezza. Come abbiamo osservato, l'effetto  $\delta$  non deve mai superare il valore dell'eccesso positivo (0,20 e forse anche un pò di più). La curva  $\delta = f(B)$  deve quindi avere l'aspetto di una curva di saturazione; coi valori del campo raggiunti non vi è però ancora alcuna indicazione sicura di un tale comportamento,  $\delta$  cresce circa linearmente con  $B$ . I nostri risultati non sono però nemmeno in contraddizione con l'ipotesi che  $\delta$  raggiunga un valore di saturazione intorno a  $\delta = 0,20$ .

4. — TEORIA DELLO STRUMENTO. — A paragrafo 1 abbiamo indicato come si può valutare l'effetto che ha l'azione convergente o divergente del campo magnetico sul numero delle particelle contate, considerando per semplicità particelle la cui direzione d'incidenza è normale agli assi dei contatori ossia al campo magnetico delle lastre (\*\*\*) . In realtà ci siamo contentati allora di valutare intuitivamente soltanto l'ordine di grandezza della variazione che il campo magnetico produce nell'angolo delimitato dai tre contatori. Il calcolo effettivo di tale variazione è assai meno semplice di quello

che sembra; in assenza di campo possiamo considerare un qualsiasi punto del diametro  $PQ$  del contatore più alto (fig. 6-a); in questo caso l'angolo delimitato dall'ultimo contatore è sempre, praticamente,  $r/d$  e il contatore intermedio non ha importanza nella considerazione geometrica. Quando il campo magnetico è intenso si ha, per le energie che interessano maggiormente,  $\sigma \approx 1$ ; orbene, la figura 6-b mostra

(\*) Naturale poichè gli sciami sono costituiti da elettroni + e - in numero eguale.

(\*\*) A Roma il numero degli impulsi singoli dei contatori era singolarmente elevato a causa della notevole radioattività dell'ambiente.

(\*\*\*) In questo modo ci si riduce a un problema in due dimensioni poichè la traiettoria sta tutta in un piano normale al campo magnetico. In questo problema i tre contatori sono rappresentati da tre circonferenze che la traiettoria deve tagliare, affinchè la particella sia registrata.

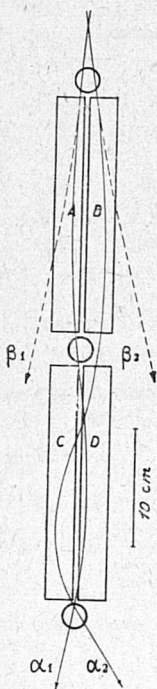


Fig. 3



la situazione per la « lente » divergente quando  $\sigma = 1$ : le particelle che passano pel centro del contatore più alto non incontrano mai il terzo contatore (qualunque direzione abbiano), l'angolo delle direzioni permesso è nullo; se invece consideriamo le traiettorie che passano a una certa distanza dal centro (per esempio vicino al bordo del primo contatore), vediamo che esse possono anche tagliare gli altri due contatori (sopra la figura è il diagramma dell'angolo permesso in funzione della distanza dal centro; quest'ultima è in una scala un po' ingrandita rispetto alla figura sottostante).

Complicazioni analoghe si presentano nel caso convergente.

Una volta inoltratisi nella discussione abbastanza complicata di questi vari casi, si può anche, senza aumentare sensibilmente il lavoro necessario, tener conto:

a) della distribuzione in energia delle particelle;

b) della distribuzione nello spazio delle direzioni d'arrivo (ossia della natura tridimensionale del problema);

c) del frenamento delle particelle nel ferro.

La possibilità di tener conto di tutti questi fattori deriva dal fatto che, come mostriamo nell'appendice, il problema tridimensionale si riduce, mediante alcune na-

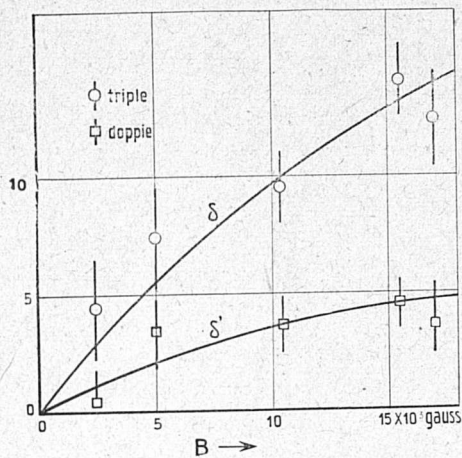


Fig. 4

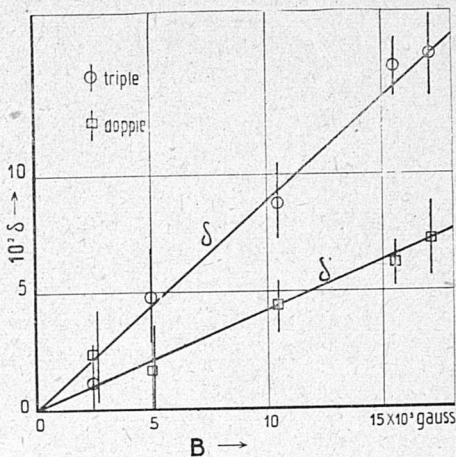


Fig. 5

turali approssimazioni, al problema in due dimensioni, che abbiamo già incontrato.

Qui ci contenteremo di indicare l'impostazione del problema, e i principali risultati.

Anzitutto definiamo due « funzioni caratteristiche » dello strumento, che ne riassumono completamente le proprietà. I nostri sforzi saranno dunque diretti alla determinazione di queste funzioni.

Delle circostanze a) e b) teniamo conto, in linea generale, scrivendo il numero  $dn$  di particelle incidenti al secondo con direzione compresa entro il cono elementare  $d\omega$  ed energia compresa nell'intervallo  $dW$  sotto la forma:

$$dn = J(W, \vartheta, \varphi) dW d\omega \quad [3]$$

dove  $\vartheta$  e  $\varphi$  sono angoli polari definenti la direzione d'arrivo. L'espressione [3] si riferisce alle particelle incidenti sulla unità di superficie normale alla direzione di arrivo; riferendoci invece all'unità di superficie orizzontale, dovremo naturalmente moltiplicare  $dn$  per il coseno dell'angolo zenitale  $\xi$ . Dovremo poi distinguere tra particelle positive e negative; intenderemo dunque che la [3] si riferisca a particelle di un determinato segno; volendo specificare il segno scriveremo  $J^+$  oppure  $J^-$ .

La figura 7 mostra come definiamo gli angoli  $\vartheta$  e  $\varphi$  per una generica traiettoria  $T$ , e mostra anche la posizione, rispetto ai tre contatori, della terna di assi cartesiani  $Oxyz$  che useremo in seguito (l'asse  $x$  è verticale).

Il numero  $dN$  delle particelle (di un determinato segno) appartenenti all'elemento  $dW d\omega$ , che nell'unità di tempo vengono registrate dallo strumento (ossia quelle che attraversano i tre contatori, supponendo il rendimento = 1) sarà dato da una espressione:

$$dN = dn \cdot \Sigma (W, \theta, \varphi) \quad [4]$$

dove la « sezione efficace »  $\Sigma$  dipende oltre che da  $W, \theta, \varphi$ , anche dalle costanti geometriche dello strumento, dal valore di  $B$  e dal segno delle particelle.

Vi sono cioè due funzioni  $\Sigma$ , una per la « lente convergente » e l'altra per la « lente divergente », che caratterizzano completamente le proprietà dello strumento. In pratica, poichè (vedi appendice) l'angolo  $\varphi$  varia entro limiti molto ristretti,

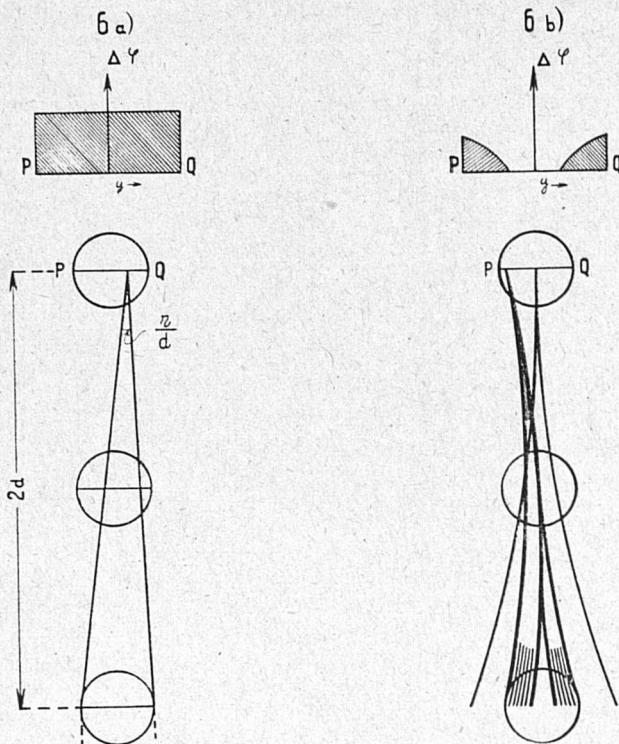


Fig. 6

potremo trascurare la dipendenza di  $J$  da  $\varphi$ , dimodochè l'espressione integrale che dà il numero  $N$  delle particelle di un dato segno che attraversano il sistema si può scrivere:

$$N = \int J (W, \theta, 0) dW \operatorname{sen} \theta d\theta \int \Sigma (W, \theta, \varphi) d\varphi$$

Possiamo dunque assumere come funzioni caratteristiche le due funzioni che si ottengono integrando rispetto a  $\varphi$  le due funzioni  $\Sigma$ .

Come si debbano determinare queste funzioni è ovvio: consideriamo il piano  $x = d$  (orizzontale e contenente l'asse del contatore superiore; vedi fig. 7); ammetteremo che, al disopra di questo piano le traiettorie non risentano l'azione del campo  $B$ , siano cioè rettilinee; il « cono di luce » relativo a un punto  $(d, y, z)$  del piano detto

è costituito dalle direzioni d'arrivo delle traiettorie  $T$  passanti per il punto, e che tagliano i tre contatori; si ha allora:

$$\Sigma (W, \theta, \varphi) = \cos \zeta \int dy dz \quad [6]$$

dove l'integrale è esteso a quei punti  $(d, y, z)$  per i quali la direzione  $(\theta, \varphi)$  appartiene al cono di luce. Si ha inoltre (vedi figura 7):

$$\cos \zeta = \sin \theta \cos \varphi \approx \sin \theta \quad [7]$$

perchè, come si è detto,  $\varphi \ll 1$ .

Rimandiamo all'appendice per la discussione del cono permesso relativo ai vari punti, e diamo senz'altro il risultato. Indichiamo con  $L$  il potere frenante del ferro (l'energia perduta da una particella per cm. di percorso); al posto dell'energia iniziale  $W$  e del frenamento  $L$  conviene introdurre due variabili adimensionali (\*).

$$\sigma = \frac{r \sin \theta}{d^2 e B} W \quad ; \quad \gamma = \frac{r}{d} \frac{L}{e B} \quad [8]$$

che chiameremo anche, per brevità, «energia» e «frenamento» (\*\*). Il risultato a cui si giunge ha la forma generale:

$$\int \Sigma d\varphi = \frac{2r^2}{d} \left\{ l \sin \theta - 2d \left| \cos \theta \right| \right\} f(\sigma, \gamma) \quad [9]$$

dove  $l$  è la lunghezza dei contatori e  $f$  è una funzione che indicheremo anche con  $K_\gamma(\sigma)$  o rispettivamente  $\Delta_\gamma(\sigma)$  secondo che la «lente» è convergente o divergente (\*\*\*).

Le funzioni  $K_0(\sigma)$  e  $\Delta_0(\sigma)$  (ossia quelle calcolate trascurando il frenamento) sono date dalle curve a tratto pieno in fig. 8; sono anche riportati con cerchietti alcuni valori di  $K$  e  $\Delta$  calcolati per  $\gamma = \frac{1}{4}$  (valori più elevati di  $\gamma$  non sono praticamente necessari; per  $\gamma$  elevato, cioè  $B$  piccolo, il risultato è noto a priori e cioè:  $K = \Delta = 0$  se  $\sigma < 2\gamma$ , ossia (vedi anche appendice) se l'energia è inferiore al minimo necessario per attraversare la lastra, e  $K \approx \Delta \approx 1$  se  $\sigma > \gamma$  poichè essendo  $B$  piccolo, l'azione della lente è trascurabile). Osservando che la variabile in ascissa è  $\sigma - \gamma$  (e non  $\sigma$ ) vediamo che i risultati per  $\gamma = 1/4$  mostrano che si ha approssimativamente (\*\*\*\*):

$$\Delta_\gamma(\sigma) \begin{cases} \approx \Delta_0(\sigma - \gamma) & \text{se } \sigma > 2\gamma \\ = 0 & \text{» } \sigma < 2\gamma \end{cases} \quad [10]$$

e analogamente per  $K$ .

Un'espressione algebrica per le funzioni  $\Delta_0$  e  $K_0$  è data nell'appendice.

(\*) Per il confronto con la [2] vedi appendice, equaz. (A 1).

(\*\*) Più esattamente si potrebbe designare  $\sigma$  come la componente verticale dell'impulso (in opportune unità).

(\*\*\*) L'espressione a secondo membro della [9] (che vale naturalmente per  $|\cotg \theta| < 1/2 d$  e altrimenti va sostituita da:  $\int \Sigma d\varphi = 0$ ) esprime la relazione tra la funzione caratteristica e i sette parametri:  $(r, d, l, B, L, W, \theta)$  mediante una funzione di due sole variabili. La semplicità del risultato è in relazione con le approssimazioni introdotte (vedi appendice).

(\*\*\*\*) Osservando che  $\sigma$  è l'energia d'arrivo,  $\sigma - \gamma$  il valore medio tra l'energia all'arrivo e l'energia all'uscita dal ferro, vediamo che la [10] ha il seguente significato intuitivo: l'azione, convergente o divergente, della «lente» si può calcolare come se il frenamento non ci fosse, purchè si attribuisca all'energia della particella il suo valore medio.

5. - VALUTAZIONE DELL'ECCESSO POSITIVO. — Le formule [5], [8], [9] e [10] del paragrafo precedente descrivono le proprietà dello strumento (\*) in modo sufficiente per una valutazione quantitativa dei risultati sperimentali.

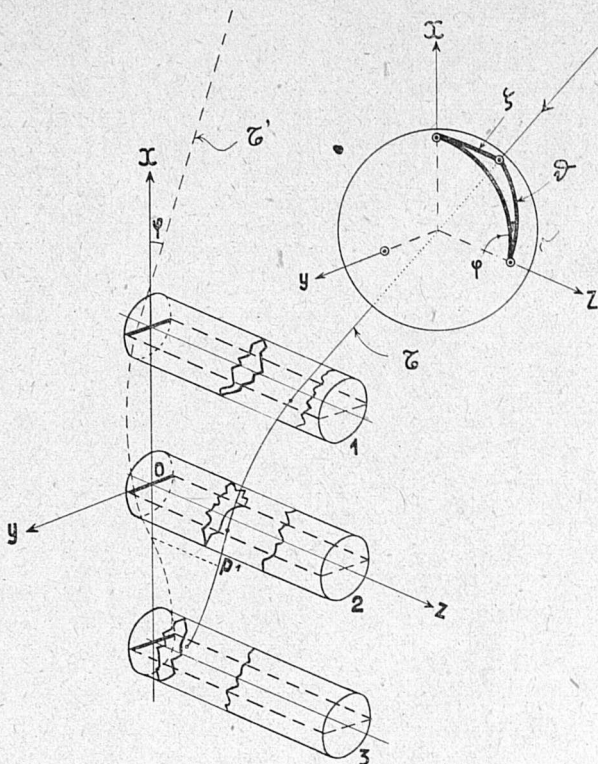


Fig. 7

Possiamo anzitutto fare un'ipotesi semplice sulla dipendenza di  $J$  dalla direzione, ponendo (\*\*):

$$J(W, \vartheta, \varphi) = \cos^3 \zeta J(W \cos \zeta) \quad [11]$$

da cui

$$J(W, \vartheta, 0) = \sin^3 \vartheta J\left(\frac{d^2 e B}{r}\right) \quad [11-a]$$

Sostituendo nelle [5] e tenendo conto della [9], si può eseguire l'integrazione rispetto a  $\vartheta$  (tenendo  $\sigma$  costante) la quale da un fattore costante che qui non interessa. Otteniamo così:

$$N \propto \int J(W_b \sigma) f(\sigma, \gamma) d\sigma \quad [12]$$

(\*) A prescindere dalla incertezza già ricordata dovuta alla diffusione.

(\*\*) La [11] tien conto: a) della legge  $\int J dW \propto \cos^2 \zeta$ ; b) del fatto che la radiazione in direzione inclinata è più dura di quella verticale.

avendo posto:

$$W_b = \frac{d^2 e B}{r} = \frac{L d}{\gamma}$$

( $W_b = 1,2 \times 10^9$  eV se  $B = 10^4$  gauss e per il nostro apparecchio).

Ricordando la definizione di  $N_1$  e  $N_2$  (paragrafo 1) e osservando che la [12] comprende le particelle di un solo segno, abbiamo subito:

$$N_1 \sim \int_0^\infty [J^+(W_b \sigma) K(\sigma) + J^-(W_b \sigma) \Delta(\sigma)] d\sigma \quad [13]$$

$$N_2 \sim \int_0^\infty [J^+(W_b \sigma) \Delta(\sigma) + J^-(W_b \sigma) K(\sigma)] d\sigma$$

e in particolare

$$N_1 - N_2 \sim \int_0^\infty [J^+ - J^-] [K - \Delta] d\sigma \quad [14]$$

tutte formule nelle quali possiamo sostituire le espressioni approssimate [10], [A 12] e [A 13] per  $K$  e  $\Delta$ .

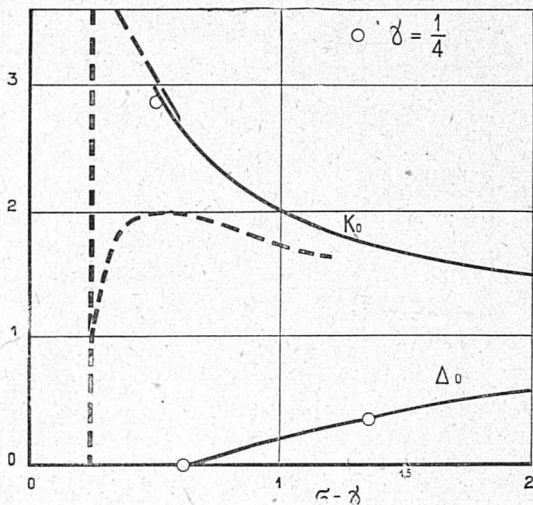


Fig. 8

Consideriamo ora varie ipotesi; supponiamo dapprima che l'eccesso positivo sia distribuito uniformemente nello spettro:

$$J^+(W) = \left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right) J(W); \quad J^-(W) = \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right) J(W) \quad [15]$$

dove  $\varepsilon$  è una costante (l'eccesso positivo). Lo spettro sperimentale noto <sup>(4)</sup>, <sup>(6)</sup>, <sup>(7)</sup> dei mesoni è rappresentato abbastanza bene dalla:

$$J(W) = (W + W')^3 \quad [16]$$

con  $W'$  costante. Sostituendo nelle [13] e [14] e usando le espressioni [A 12] e [A 13] dell'appendice abbiamo calcolato  $N_1$  e  $N_2$  in funzione di  $B$ . Conviene misurare  $B$  usando come unità il campo  $B_0$ :

$$B_0 = \frac{r}{d^2} \frac{W' + Ld}{e} \approx \frac{r W'}{d^2 e} \quad [17]$$

che supponendo  $W' = 3 \times 10^9$  eV,  $Ld = 0,23 \cdot 10^9$  eV, è  $B_0 \approx 25\,000$  gauss. Nella figura 9 le curve (\*) a tratto pieno e rispettivamente punteg-

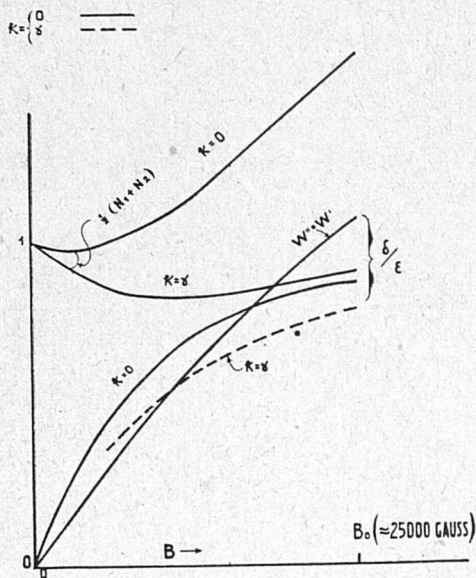


Fig. 9

giate sono calcolate per i due casi estremi  $k=0$  e  $k=\gamma$  (vedi appendice); come si vede, l'incertezza sul valore di  $k$  non ha un'influenza troppo grave sul risultato.

L'andamento di  $\delta$  in funzione di  $B$  corrisponde abbastanza all'andamento circa lineare della  $\delta$  sperimentale, poichè i valori di  $B$  usati sono sensibilmente inferiori a  $B_0$ . Essendo il valore sperimentale di  $\delta = 0,15$  per  $B = 17\,000$  gauss, ricaviamo confrontando con le due curve di fig. 9 e supponendo  $B_0 = 25\,000$  gauss, un valore per l'eccesso positivo  $\varepsilon$  compreso fra 0,19 e 0,23. Dunque  $\varepsilon = 20\%$  ca.

(\*) Diamo anche, sebbene siano meno interessanti, le curve teoriche per  $N_1 + N_2$ , affinchè si veda che l'andamento trovato sperimentalmente (vedi fig. 10), che a prima vista può sorprendere, è invece proprio quello previsto dalla teoria

Questo risultato è in buon accordo con quelli di Hughes e Jones.

Esaminiamo ora in breve la questione seguente: evidentemente se si fa l'ipotesi che l'eccesso sia distribuito in modo non uniforme nello spettro, si ottiene una diversa dipendenza dell'eccesso sperimentale  $\delta$  dal campo  $B$ . In linea di principio il metodo delle coincidenze permette dunque di studiare anche la distribuzione dell'eccesso positivo; la questione pratica è se la curva  $\delta(B)$  sia sufficientemente sensibile a variazioni nella distribuzione. Abbiamo esaminato la questione facendo sulla distribuzione dell'eccesso una ipotesi radicalmente diversa da quella precedente, supponendo cioè che l'ec-

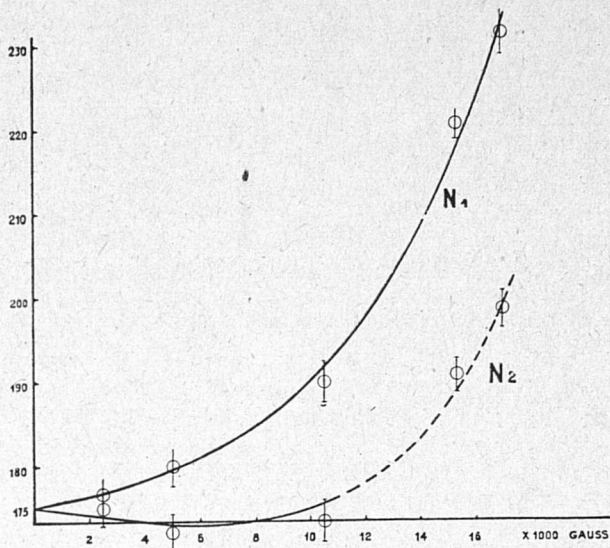


Fig. 10

cesso positivo sia concentrato in un intervallo strettissimo intorno a una energia  $W''$  (sempre ammettendo per lo spettro complessivo:  $J^+ + J^-$  la legge di distribuzione  $(W + W')^{-3}$ ). Il valore di  $\delta/\epsilon$  dipende in questo caso, oltre che da  $B/B_0$ , anche dal rapporto  $W''/W'$ . La linea continua in figura 9 rappresenta  $\delta$  in funzione di  $B$  per il caso  $W' = W''$ . L'andamento della curva è abbastanza diverso da quello precedentemente trovato, ma non ci sentiamo di affermare che i dati sperimentali vadano più d'accordo con un'ipotesi o con l'altra.

Una discrepanza sensibile si ha invece se si suppone  $W'' = \frac{1}{4} W'$  (cioè

un eccesso localizzato presso l'energia relativamente bassa di  $W'' \approx 8 \times 10^8$  eV); si ha ora naturalmente un effetto sperimentale  $\delta$  assai più elevato (a parità di eccesso positivo  $\epsilon$ ) (\*). La discrepanza però si riferisce soltanto alla grandezza dello effetto  $\delta$  (relativamente ad  $\epsilon$ ); l'andamento di  $\delta$  in funzione di  $B$  è invece di nuovo simile a quello prima incontrato, e anzi molto vicino a quello della curva  $k = \gamma$ , nell'ipotesi dell'eccesso

(\*) Qui si può avere:  $\delta > \epsilon$ , e ciò non è in contraddizione con quanto è stato detto a paragrafo 1, che si riferiva esplicitamente all'ipotesi dell'eccesso distribuito uniformemente.

distribuito uniformemente. Se però ammettiamo, come noto da altre ricerche, il dato  $\varepsilon \approx 0,20$ , le nostre misure mostrano che l'eccesso positivo non è concentrato nella parte di bassa energia dello spettro.

APPENDICE

Riferendoci alla figura 7 schematizziamo l'andamento del campo magnetico, supponendo  $B=0$  per  $x>d$  (ossia al disopra del piano orizzontale passante per l'asse del contatore superiore); per  $x<d$  supponiamo il vettore  $B$  parallelo all'asse  $z$  e costante in valore assoluto e di verso opposto dalle due parti del piano  $zx$  (trascuriamo dunque gli intraferri). La curvatura della traiettoria  $T$  cambia dunque bruscamente di segno quando, come avviene nel punto  $P'$  della figura, la  $T'$  taglia il piano  $zx$ . Poichè il campo, quando non è nullo, è parallelo sempre all'asse  $z$ , vale il *Teorema*: la tangente in un punto generico alla  $T'$  fa con l'asse  $z$  un angolo costante (e uguale quindi al valore iniziale  $\vartheta$ ). Indichiamo con  $w$  l'energia della particella in un punto generico della traiettoria (supponiamo  $w \gg \mu c^2$ , se  $\mu$  è la massa della particella) e con  $\rho$  il raggio di curvatura della curva  $T'$  proiezione di  $T$  sul piano  $Oxy$  (\*) si trova facilmente:

$$w \sin \vartheta = e B \rho \tag{A 1}$$

Indicando inoltre con  $ds$  un arco elementare di  $T'$ , l'arco corrispondente su  $T$  sarà  $ds/\sin \vartheta$ . Allora, misurando positivamente gli archi dal basso verso l'alto:

$$\sin \vartheta \frac{dw}{ds} = L \tag{A 2}$$

Le [A 1] e [A 2] mostrano che  $T'$  è una spirale logaritmica.

Osserviamo ora che, con i valori di  $B$  praticamente raggiungibili, si ha  $\rho \gg d$ , poichè inoltre  $d \gg r$ , vediamo facilmente che se  $T'$  taglia i tre contatori, l'angolo  $\psi$  che fa la tangente a  $T'$  con l'asse  $x$  è sempre  $\psi \ll 1$ .

Possiamo dunque sostituire alla condizione, secondo la quale  $T'$  deve tagliare i tre cilindri, che rappresentano in figura i contatori, la condizione assai più semplice (\*\*):  $T'$  deve tagliare le tre sezioni assiali orizzontali dei tre cilindri (i tre rettangoli segnati a tratti in figura 7).

Questa condizione si può anche esprimere mediante due condizioni relative alle proiezioni di  $T'$  sul piano  $Oxy$ , e  $T''$  (non segnata in figura) sul piano  $Oxz$ ,  $T'$  deve tagliare i tre segmenti orizzontali (segnati a tratto forte in figura); la condizione per  $T''$  è analoga.

Sebbene le equazioni differenziali [A 1] e [A 2] siano integrabili esattamente, è assai più semplice basare la discussione su una soluzione approssimata; se  $y=y(x)$  è l'equazione di  $T'$  si ha:

$$\left| \frac{dy}{dx} \right| \approx \varphi \ll 1 \quad \text{e quindi:} \quad \begin{cases} ds = dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \approx dx \\ (***) \quad \pm \frac{1}{\rho} \approx \frac{d^2y}{dx^2} \end{cases} \tag{A 3}$$

Così facendo si introducono nel calcolo della sezione efficace  $\Sigma$  errori dell'ordine (in valore relativo) di  $r/d$  oppure  $d/\rho$ , cioè trascurabili.

(\*) Questa definizione coincide con quelle precedenti (§ 1) di  $\rho$  nel caso particolare allora considerato.

(\*\*) L'errore che si commette alle estremità dei cilindri è piccolo poichè  $l \gg r$ .

(\*\*\*) Il segno è + se la lente è convergente e  $y < 0$ , oppure se la lente è divergente e  $y > 0$ .



Introduciamo ancora le variabili adimensionali  $\xi, \eta$  mediante:

$$x = \xi d \quad ; \quad y = r \eta \quad [A 4]$$

dalla equazione [A 2] si deduce allora (ricordando che  $W$  è l'energia iniziale):

$$\text{sen } \vartheta \cdot \omega = L d (\xi - 1) + \text{sen } \vartheta W$$

e sostituendo in [A 1]:

$$\frac{d^2 \eta}{d \xi^2} = \pm \frac{1}{\sigma + \gamma (\xi - 1)} \quad [A 5]$$

che è l'equazione differenziale di  $T''$  nella forma più semplice. La condizione affinché  $T'$  tagli i tre contatori è:

$$|\eta| < 1 \quad \text{per:} \quad \xi = 0, \pm 1 \quad [A 6]$$

Passando ora a  $T'''$  vediamo che il suo raggio di curvatura  $\varrho''$  è dell'ordine di:

$$\varrho'' \sim \varrho / \text{sen } \vartheta \cos \vartheta \text{ sen } \psi \gg \varrho \gg d.$$

$T'''$  si può dunque considerare come rettilinea (\*); l'angolo fra  $T'''$  e l'asse  $z$  è praticamente uguale a  $\vartheta$ . Indichiamo ora con  $y_1, z_1$  le coordinate  $y$  e  $z$  del punto  $P$  del piano  $x=d$  per il quale passa  $T'$  (cfr. paragrafo 4). Si deve allora che la condizione affinché  $T'$  tagli i tre contatori si riduce, per la parte che riguarda la  $T'''$ , alle condizioni:

$$0 < z_1 < l \quad ; \quad 0 < z_1 - 2d \cotg \vartheta < l \quad [A 7]$$

Corrispondentemente poniamo:  $y_1 = r \eta_1 \quad ; \quad \eta'_1 = \left( \frac{d \eta}{d \xi} \right)_{\xi=1}$

Si ha allora:

$$-\varphi \sim + \left( \frac{d y}{d x} \right)_{x=d} = \frac{r}{d} \eta'_1 \quad [A 8]$$

Torniamo ora alla formula [6] per la sezione efficace; vediamo allora che:

$$\begin{aligned} \int \Sigma d \varphi &\sim \text{sen } \vartheta \int d y_1 d z_1 d \varphi = (**) = \text{sen } \vartheta (l - 2d |\cotg \vartheta|) \int d y_1 d \varphi = \\ &= \text{sen } \vartheta (l - 2d |\cotg \vartheta|) \frac{r^2}{d} \int d \eta_1 d \eta'_1 \end{aligned} \quad [A 9]$$

Dove l'integrale rispetto a  $\eta_1, \eta'_1$  va esteso a quei valori di queste variabili a cui corrisponde una soluzione della [A 5] che soddisfa alle condizioni di taglio [A 6]. Poichè  $\eta_1, \eta'_1$  si possono considerare come « dati iniziali » per una traiettoria  $T'$  (a partire naturalmente dalla retta  $x=d$  nel piano  $Oxy$ ), vediamo che l'integrale

(\*) Non solo la curvatura di  $T'''$  è assai minore di quella di  $T'$ , ma anche essa agisce in un piano nel quale l'apertura angolare del cono permesso è grande, e le deflessioni hanno quindi minore importanza.

(\*\*) integrando rispetto a  $z_1$ , e ricordando [A 7].

rispetto a  $\eta_1$   $\eta'_1$  dipende unicamente dai valori delle costanti  $\sigma$  e  $\gamma$  che compaiono nell'equazione [A 5].

Abbiamo così giustificato la formula [9]. Il problema di determinare la funzione:

$$f(\sigma, \gamma) = \frac{1}{2} \int d\eta_1 d\eta'_1 \quad [A 10]$$

è ora semplice sebbene un po' laborioso. Si tratta in sostanza di determinare per ogni punto del diametro orizzontale del cerchio più alto (nel piano  $Oxy$ ), ossia per ogni valore di  $\eta_1$  il «cono di luce» (in due dimensioni) ossia l'insieme dei valori di  $\eta'_1$  corrispondenti a traiettorie permesse; tale insieme non è sempre connesso.

Le rette che delimitano il cono di luce (ossia i valori limiti di  $\eta'_1$ ), corrispondono a traiettorie  $T'$  tangenti a uno dei due cerchi inferiori, ossia, entro l'approssimazione adottata, traiettorie che soddisfano a una delle due condizioni:

$$\text{oppure } \left. \begin{array}{l} y = \pm r \quad \text{per } x = 0 \\ y = \pm r \quad \text{per } x = -d \end{array} \right\} \text{ossia: } \left. \begin{array}{l} \eta = \pm 1 \quad \text{per } \xi = 0 \\ \eta = \pm 1 \quad \text{per } \xi = -1 \end{array} \right\} \quad [A 11]$$

Il «cono di luce» è completamente determinato una volta noti tutti i valori limiti. A prima vista il procedimento naturale sembra quello di integrare la [A 5] partendo da un punto generico  $x = d$   $y = y_1$ , del diametro superiore, variando  $\eta'_1$  sino a trovare una traiettoria limite; conviene invece partire da uno dei punti [A 11]; le traiettorie, per esempio, che partono da un estremo del diametro intermedio, e tagliano sia il diametro inferiore che quello superiore, sono traiettorie limiti per il cono di luce relativo a un punto del diametro superiore. Nel caso  $\gamma \neq 0$  si deve condurre il calcolo numericamente, cioè tracciare tante traiettorie limiti finchè la regione dei valori permessi di  $\eta_1$  e  $\eta'_1$  sia nota a sufficienza, e poi eseguire l'integrale [A 10] numericamente; il calcolo va ripetuto per diversi valori di  $\sigma$ .

Nel caso  $\gamma = 0$  è stato tuttavia possibile eseguire il calcolo analiticamente, e si è ottenuto

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta_0(\sigma) = 1 - \frac{1}{\sigma} + \frac{1}{4\sigma^2} \quad \sigma > \frac{1}{2} \\ \Delta_0(\sigma) = 0 \quad \sigma < \frac{1}{2} \end{array} \right. \quad [A 12]$$

$$K_0(\sigma) = 1 + \frac{1}{\sigma} \quad \sigma > 1$$

Il caso convergente però non si è potuto studiare analiticamente per  $\sigma < 1$  ed è perciò stato calcolato numericamente il valore di  $K_0$  per due altri valori; si può così tracciare con sufficiente precisione la curva tra  $\sigma = \frac{1}{2}$  e  $\sigma = 1$ .

I valori per  $\gamma = \frac{1}{2}$  dati in figura 8 sono calcolati numericamente. Si tenga presente che i valori in vicinanza di  $\sigma = 2\gamma$  (energia minima per attraversare il ferro) non sono attendibili perchè ivi l'approssimazione che abbiamo usato non è valida ( $q$  non è »  $d$  nella parte finale della traiettoria). Non ci è parso utile tentare il calcolo (oltremodo laborioso) più esatto, perchè la diffusione rende certamente illusorii i risultati a queste energie bassissime.

I valori particolari calcolati si possono rappresentare abbastanza bene mediante la [10] per quel che riguarda la funzione  $\Delta$ . L'andamento della funzione  $K$  si può rappresentare abbastanza bene mediante la

$$K(q) = 1 + \frac{1}{\sigma - \gamma} - \frac{k}{(\sigma - \gamma)^2} \quad [A 13]$$

fissando opportunamente la scelta della costante  $k$ . Ciò si potrebbe fare imponendo per esempio che, per il minimo valore di  $\sigma$ ,  $K$  assuma il valore calcolato numericamente. Data però l'incertezza di questo valore è più prudente fare varie ipotesi

sul valore di  $k$ , e controllare se le conclusioni variano di molto; è quello che abbiamo fatto nel paragrafo 5. Possiamo probabilmente considerare come valori estremi di  $k$  i valori  $k=0$  (la curva tratteggiata superiore in figura 8) e  $k=\gamma$  (la curva tratteggiata inferiore, supponendo  $\gamma=\frac{1}{2}$ ). Quest'ultimo valore è scelto in modo che sia

$$K(2\gamma) = 1 \quad [A 14]$$

valore ancora plausibile, se si pensa che per l'energia minima l'azione moltiplicativa delle lastre è dovuta al forte incurvamento finale delle traiettorie, e può venire annullata dalla forte diffusione negli ultimi cm di ferro.

Le esperienze pubblicate in questa nota fanno parte del complesso di ricerche compiute dalla Spedizione per lo studio dei raggi cosmici in alta montagna (Cervinia, inverno 1940-41) organizzata dall'Istituto nazionale di geofisica coi mezzi forniti parte dal Comitato per la geofisica e la meteorologia e parte dal fondo di fisica nucleare del Consiglio nazionale delle ricerche.

E' per noi un grato dovere ringraziare la Soc. An. Cervinia per tutte le agevolazioni che ci ha concesso durante lo svolgimento delle esperienze.

#### BIBLIOGRAFIA

- (1) ROSSI B., « Nature », v. CXXVIII, 1931, p. 300.
- (2) MOTT-SMITH L. M., « Phys. Rev », v. XXXV, 1930, p. 1125; v. XXXVII, 1931, p. 1001, v. XXXIX, 1932, p. 403.
- (3) VON WEIZSÄCKER C. F., « Ann. d. Phys. », v. XVII, 1933, p. 869.
- (4) BLACKETT P. M. S., « Proc. Roy. Soc. », v. CLIX, 1931, p. 1.
- (5) LEPRINCE-RINGUET L., CRUSSARD J., « Journ. de Phys. », v. VIII, 1937, p. 207.
- (6) JONES H., « Rev. Mod. Phys. », v. XI, 1939, p. 235.
- (7) HUGHES D. J., « Phys. Rev », v. LVII, 1940, p. 592.
- (8) WILLIAMS E. J., « Proc. Roy. Soc. », v. CLXIX, 1939, p. 531.
- (9) TROST A., « Zs. f. Phys. », v. CV, 1937, p. 399.