PUBBLICAZIONI
DELL'ISTITUTO NAZIONALE DI GEOFISICA
DEL CONSIGLIO NAZIONALE DELLE RICERCHE
diretto dal prof. ANTONINO LO SURDO Accademico d'Italia

N. 106

PAOLO EMILIO VALLE

Sulla determinazione delle coordinate ipocentrali di un sisma lontano

ROMA
ANNO MCMXLIII

Estratto dal « *Bollettino della Società Sismologica Italiana* »

Vol. XL - N. 3-4 - Anno 1942

ROMA - SCUOLA TIPOGRAFICA PIO X - VIA DEGLI ETRUSCHI, 7-9 - ROMA

Riassunto. — Onde portare un contributo ai metodi per il calcolo delle coordinate ipocentrali di un terremoto lontano, si espongono due nuovi metodi e si esaminano i risultati ottenuti da un'applicazione numerica.

1. – I metodi per la determinazione delle coordinate epicentrali di un terremoto lontano non sono numerosi e si possono dividere in grafici e analitici. Il grado di approssimazione ottenibile con i metodi grafici dipende, oltre che dall'approssimazione con cui si conoscono i tempi di inizio delle fasi di cui si fa uso, anche dalla scala del disegno; è inoltre necessario conoscere, con discreta approssimazione, la profondità ipocentrale per la scelta delle dromocrone da usare, e ciò è spesso impossibile.

I metodi grafici sono quindi utilizzati per una rapida valutazione della posizione dell'epicentro o per stabilire un valore approssimato delle sue coordinate, che serva di base ad ulteriori approssimazioni analitiche.

I metodi analitici dànno maggior affidamento, ma peccano anch'essi di notevoli difetti; tra l'altro quello di consistere in una serie di successive approssimazioni, le quali rendono il calcolo numerico notevolmente faticoso.

Tale inconveniente è insito nella natura del problema.

Il metodo analitico più noto è quello di Geiger, il quale richiede però la conoscenza della profondità ipocentrale per la scelta della dromocrona delle onde di dilatazione.

Si può fare a meno di quest'ultimo dato quando si conoscano le dromocrone in funzione della profondità ipocentrale.

2. – Si considerino n osservatorî e siano λ_0, φ_0 le coordinate dell'epicentro, h_0 la profondità ipocentrale, H_0 il tempo origine, λ_i, φ_i le coordinate e Δ_i la distanza epicentrale relativa all' i^{mo} Osservatorio, t_i il tempo di arrivo di una certa fase, per esempio delle onde P.

Dato che $t_i - H_0$ è funzione di Δ_i e di h_0, dovranno sussistere le n relazioni:

$$t_i = f(\Delta_i, h_0) + H_0 \qquad (i = 1, 2, \ldots\ldots, n) \tag{1}$$

avendosi inoltre:

$$\Delta_i = \Delta\,(\lambda_0, \varphi_0;\ \lambda_i, \varphi_i) \tag{2}$$

dove Δ è il simbolo di funzione nota.

Si tratta di determinare le quattro incognite λ_0, φ_0, h_0, H_0 in modo da soddisfare la (1) con la migliore approssimazione possibile.

Se con λ, φ, h, H si indicano dei valori approssimati di λ_0, φ_0, h_0, H_0, in base a tali valori approssimati le n equazioni (1) daranno, in generale, origine a certi errori E_i. Si avrà:

$$E_i = (t_i - H) - f(\Delta_i, h) \tag{3}$$

dove naturalmente Δ_i è calcolato mediante i valori approssimati, cioè:

$$\Delta_i = \Delta\,(\lambda, \varphi;\ \lambda_i, \varphi_i)\,. \tag{4}$$

Se nella (3) si sostituisce a t_i il valore dato dalla (1), si ha:

$$E_i = f[\Delta\,(\lambda_0, \varphi_0; \lambda_i, \varphi_i), h_0] - f[\Delta\,(\lambda, \varphi; \lambda_i, \varphi_i), h] + H_0 - H\,. \tag{5}$$

Posto ora:

$$\lambda_0 = \lambda + \xi\,, \quad \varphi_0 = \varphi + \zeta\,, \quad h_0 = h + \eta\,, \quad H_0 = H + \varepsilon \tag{6}$$

e confondendo l'incremento indicato al secondo membro della (5) col differenziale df risultano le n equazioni lineari:

$$E_i = \left(\frac{\partial f}{\partial \Delta}\right)_i \left(\frac{\partial \Delta}{\partial \lambda}\right)_i \xi + \left(\frac{\partial f}{\partial \Delta}\right)_i \left(\frac{\partial \Delta}{\partial \varphi}\right)_i \zeta + \left(\frac{\partial f}{\partial h}\right)_i \eta + \varepsilon\,. \tag{7}$$

Si tratta ora di determinare le correzioni ξ, ζ, η, ε, da apportare ai valori approssimati λ, φ, h, H col metodo dei minimi quadrati, imponendo cioè che sia:

$$\sum_{1i}^{n}\left[\left(\frac{\partial f}{\partial \Delta}\right)_i\left(\frac{\partial \Delta}{\partial \lambda}\right)_i \xi + \left(\frac{\partial f}{\partial \Delta}\right)_i\left(\frac{\partial \Delta}{\partial \varphi}\right)_i \zeta + \left(\frac{\partial f}{\partial h}\right)_i \eta + \varepsilon - \mathrm{E}_i\right]^2 = \text{minimo} \qquad (8)$$

Utilizzando una formula di trigonometria sferica, si ha:

$$\left(\frac{\partial \Delta}{\partial \lambda}\right)_i = \frac{\cos\varphi\,(\alpha_i \sin\lambda - \beta_i \cos\lambda)}{\sin \Delta_i}$$

$$\left(\frac{\partial \Delta}{\partial \varphi}\right)_i = \frac{\sin\varphi\,(\alpha_i \cos\lambda + \beta_i \sin\lambda) - \gamma_i \cos\varphi}{\sin \Delta_i} \qquad (9)$$

dove α_i, β_i, γ_i sono le costanti dell'i^{mo} Osservatorio.

Posto:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial \Delta}\right)_i\left(\frac{\partial \Delta}{\partial \lambda}\right)_i = a_i, \quad \left(\frac{\partial f}{\partial \Delta}\right)_i\left(\frac{\partial \Delta}{\partial \varphi}\right)_i = b_i, \quad \left(\frac{\partial f}{\partial h}\right)_i = c_i \qquad (10)$$

i valori di ξ, ζ, η, ε, che soddisfano la condizione (8), sono dati dalla soluzione del sistema normale:

$$\left\{\begin{aligned}
[aa]\,\xi + [ab]\,\zeta + [ac]\,\eta + [a]\,\varepsilon &= [a\mathrm{E}] \\
[ba]\,\xi + [bb]\,\zeta + [bc]\,\eta + [b]\,\varepsilon &= [b\mathrm{E}] \\
[ca]\,\xi + [cb]\,\zeta + [cc]\,\eta + [c]\,\varepsilon &= [c\mathrm{E}] \\
[a]\,\xi + [b]\,\zeta + [c]\,\eta + n\,\varepsilon &= [\mathrm{E}]
\end{aligned}\right. \qquad (11)$$

3. - Il metodo esposto viene applicato al terremoto dell'Alaska del 22 luglio 1937, già studiato da N. Adkins [1], che ha calcolato col metodo di Geiger le coordinate dell'epicentro, ottenendo il seguente risultato:

$$\lambda_0 = -\,146^\circ{,}58 \qquad \varphi_0 = +\,64^\circ{,}67$$

o, in coordinate geocentriche: (12)

$$\lambda_0 = -\,146^\circ{,}58 \qquad \varphi_0 = +\,64^\circ{,}52$$

e il tempo origine:

$$\mathrm{H}_0 = 17^h\ 09^m\ 30^s$$

Le coordinate epicentrali e le profondità ipocentrale di tale sisma, sono state da me ricalcolate ([2]) applicando a 20 Osservatorî, un metodo che utilizza le differenze dei tempi in arrivo S–P, pervenendo al seguente risultato:

$$\lambda_0 = -146^\circ,84 \qquad \varphi_0 = +64^\circ,58 \qquad h_0 = 56{,}3\ \text{km}\,. \qquad (13)$$

Assunti (*) come valori approssimati di λ_0, φ_0, h_0, H_0,

$$\lambda = -146^\circ,58 \quad \varphi = +64^\circ{,}52 \quad h = 56{,}3\ \text{km} \quad H = 17^h 09^m 30^s \quad (14)$$

mediante l'utilizzazione di 66 dati si è proceduto alle successive approssimazioni richieste dal metodo esposto, previo calcolo della funzione $f\,(\Delta, h)$ (vedi appendice).

Da una prima approssimazione è risultato:

$$\xi = +0{,}55 \quad \zeta = -0^\circ,33 \quad \eta = -10{,}6\ \text{km} \quad \varepsilon = +6^s,46 \quad (15)$$

d'onde:

$$\lambda_0 = -146^\circ{,}03 \quad \omega_0 = +64^\circ{,}19 \quad h_0 = 45{,}7\ \text{km} \quad H_0 = 17^h 09^m 36^s{,}46 \quad (16)$$

Da una successiva approssimazione eseguita assumendo come valori approssimativi delle incognite del problema, i valori (16), si è ricavato:

$$\xi = +0^\circ,58 \quad \zeta = -0^\circ,34 \quad \eta = +13{,}4\ \text{km} \quad \varepsilon = +1^s,57 \quad (17)$$

e quindi:

$$\lambda_0 = -145^\circ{,}45 \quad \varphi_0 = +63^\circ{,}85 \quad h_0 = 59{,}1\ \text{km} \quad H_0 = 17^h 09^m 38^s{,}03 \quad (18)$$

Gli errori medi di quest'ultima approssimazione sono risultati:

$$\mu_\xi = \pm 0^\circ{,}23 \quad \mu_\zeta = \pm 0^\circ{,}07 \quad \mu_\eta = \pm 23{,}15\ \text{km} \quad \mu_\varepsilon = \pm 2^s{,}52$$

In corrispondenza dei valori (14) si ha: $\sum E_i^2 = 4469{,}10$
» » » (16) » $\sum E_i^2 = 663{,}31$
» » » (18) » $\sum E_i^2 = 668{,}06$

Dai risultati numerici appare che l'approssimazione migliore è raggiunta con i valori (16).

È da notare come l'ultima approssimazione, pur risultando $\sum_i = 668{,}06$ cioè di pochissimo differente dalla precedente, porti a correzioni alquanto notevoli.

Nella tabella che segue, sono contenuti, per ogni Osservatorio, i tempi di arrivo utilizzati e rilevati da N. Adkins, nonchè gli errori E_i relativi alle predette approssimazioni.

(*) I calcoli numerici sono stati gentilmente eseguiti dall'Istituto per le Applicazioni del Calcolo.

i	*Osservatorio*	t_i	E'_i	E''_i	E'''_i
1	Berkeley	$17^h\ 15^m\ 44^s$	+ 2,61	— 4,86	— 5,16
2	S. Francisco	49	+ 7,15	— 0,32	— 0,61
3	Palo Alto	51	+ 5,50	— 1,98	— 2,26
4	Mount Hamilton	49	+ 1,50	— 5,99	— 6,26
5	Fresno	16 04	+ 6,97	— 0,55	— 0,79
6	Tinemaha	03	+ 4,36	— 3,16	— 3,39
7	Santa Barbara	20	+ 3,81	— 3,76	— 3,93
8	Mount Wilson	25	+ 2,79	— 4.80	— 4,95
9	Pasadena	24	+ 1,45	— 6,14	— 6,29
10	Riverside	28	+ 2,20	— 5,39	— 5,54
11	La Jolla	39	+ 3,90	— 3,71	— 3,83
12	Tucson	17 00	+ 3,38	— 4,27	— 4,35
13	Scoresby Sund	04	+ 2,20	— 5,45	— 5,52
14	Chicago	09	+ 5,92	— 1,74	— 1,81
15	Ivigtut	12	+ 4,04	— 3,63	— 3,69
16	Florissant	17	+ 4,67	— 3,00	— 3,06
17	S. Louis	17	+ 1,19	— 6,48	— 6,53
18	Toronto	24	+ 4,18	— 3,49	— 3,54
19	Ottawa	26	+ 4,77	— 2,90	— 2,95
20	Cincinnati	36	+ 4,45	— 3,23	— 3,26
21	Honolulu	38	+ 3,46	— 4,23	— 4,26
22	Technology	18 01	+ 9,03	+ 1,34	+ 1,32
23	Harvard	17 57	+ 4,44	— 3,26	— 3,28
24	Fordham	18 02	+ 6,60	— 1,10	— 1,12
25	Abisko	02	+ 5,63	— 2,06	— 2,09
26	Georgetown	02	+ 4,89	— 2,81	— 2,83
27	Columbia	22	+ 6,97	— 0,73	— 0,75
28	Bergen	52	+ 8,08	+ 0,40	+ 0,27
29	Tacubaya	19 08	+ 13,15	+ 5,48	+ 5,43
30	Upsala	01	+ 4,91	— 2,77	— 2,81
31	Zinsen	06	+ 7,84	+ 0,16	+ 0,12
32	Pulkovo	10	+ 9,56	+ 1,89	+ 1,85
33	Stonyhurst	30	+ 10,72	+ 3,06	+ 3,00
34	Copenaghen	30	+ 8,97	+ 1,31	+ 1,25
35	Liverpool	30	+ 8,50	+ 0,84	+ 0,78
36	Lund	30	+ 8,43	+ 0,78	+ 0,71
37	Mosca	37	+ 9,27	+ 1,62	+ 1,55
38	Amburgo	44	+ 10,68	+ 3,03	+ 2,96
39	Oxford	45	+ 10,89	+ 3,24	+ 3,17
40	Kew	47	+ 9,98	+ 2,33	+ 2,26
41	De Bilt	50	+ 11,33	+ 3,68	+ 3,61
42	Uccle	56	+ 9,77	+ 2,13	+ 2,05
43	Gottingen	57	+ 10,64	+ 3,00	+ 2,92
44	Zi-Ka-wei	20 00	+ 11,03	+ 3,39	+ 3,31
45	Jena	01	+ 9,49	+ 1,85	+ 1,77
46	Parigi	08	+ 11,10	+ 3,47	+ 3,38
47	Praga	10	+ 10,97	+ 3,33	+ 3,25
48	Karlsruhe	11	+ 9,72	+ 3,26	+ 2,00

i	*Osservatorio*	t_i	E'_i	E''_i	E'''_i
49	Strasburgo	$17^h\ 20^m\ 14^s$	+10.66	+ 3,02	+ 2,94
50	Stoccarda	14	+10,59	+ 2,95	+ 2,87
51	München	19	+ 9,77	+ 2,13	+ 2,05
52	Zurigo	21	+ 9,34	+ 1,70	+ 1,62
53	Vienna	22	+10,22	+ 2,58	+ 2,50
54	Neuchâtel	23	+10,39	+ 2,75	+ 2,67
55	Graz	26	+ 7,43	— 0,21	— 0,29
56	Zagabria	37	+10,19	+ 2,55	+ 2,47
57	Belgrado	45	+ 9,72	+ 2,07	+ 2,00
58	Coimbra	46	+10,41	+ 2,76	+ 2,69
59	Toledo	54	+10,39	+ 2,73	+ 2,67
60	Hong Kong	21 05	+ 7,87	+ 0,20	+ 0,16
61	Cartuja	11	+11,22	+ 3,55	+ 3,51
62	S. Fernando	14	+13,50	+ 5,83	+ 5,79
63	Manila	32	+10,90	+ 3,19	+ 3,20
64	Ksara	52	+ 8,99	+ 1,24	+ 1,30
65	Helwan	22 13	+ 8,37	+ 0,57	+ 0,68
66	Huancayo	49	+ 8,09	+ 0,27	+ 0,41

Gli errori E_i sono tutti negativi per Osservatorî la cui distanza epicentrale è inferiore a circa 50° mentre per distanze superiori sono tutti positivi. Ciò è probabilmente dovuto alle discontinuità esistenti nell'interno della terra.

4. - In considerazione dei risultati numerici si può dire che, per un terremoto lontano l'approssimazione con cui si può determinare la posizione dell'epicentro, non può essere, nelle condizioni più favorevoli e anche adoperando un grande numero di dati, che di un mezzo grado per ciascuna delle due coordinate, di qualche secondo per il tempo di origine e di 15-20 km per la profondità ipocentrale, quando sia nota la dromocrona delle onde che si utilizzano anche in funzione della profondità ipocentrale.

Questa approssimazione dipende evidentemente e principalmente da:

a) estensione della zona ipocentrale;

b) errori d'osservazione;

c) errori nella correzione del tempo;

d) uso di dromocrone non esatte;

e) linearizzazione del problema;

f) natura del suolo sottostante agli strumenti.

Non è possibile una valutazione anche approssimata di ciascuna delle cause d'indeterminazione sopraelencate, specialmente per le alte velocità apparenti delle onde sismiche.

5. – Per determinare la posizione dell'epicentro e del tempo origine senza conoscere la dromocrona delle onde i cui tempi di arrivo s'intendono utilizzare, si può pensare di applicare il seguente metodo.

Siano λ_0, φ_0, H_0 le incognite del problema e si ammetta inoltre che l'equazione della dromocrona relativa alla profondità del sisma che si considera, si possa scrivere:

$$t\text{-}H_0 = a_{01}\,\Delta + a_{02}\,\Delta^2 + a_{03}\,\Delta^3 + a_{04}\,\Delta^4 + a_{05}\,\Delta^5 = f(\Delta) \tag{19}$$

Ciò è lecito per le onde P in un intervallo di Δ che va dai 30 ai 100 gradi (vedi appendice).

Considerando n Osservatorî, indicando con t_i i tempi di arrivo della fase scelta, dovranno sussistere le n relazioni:

$$t_i = f(\Delta_i) + H_0\,. \tag{20}$$

Si supponga ora di conoscere solo dei valori approssimati dei coefficienti a_{0s} del polinomio a secondo membro della (19). Posto:

$$\begin{array}{ll} a_{01} = a_1 + \vartheta_1 & \lambda_0 = \lambda + \xi \\ a_{02} = a_2 + \vartheta_2 & \varphi_0 = \varphi + \zeta \\ \ldots\ldots & H_0 = H + \varepsilon \end{array} \tag{21}$$

si avrà, analogamente a come si è proceduto al n. 2:

$$E_i = (t_i - H) - f(\Delta_i) \tag{22}$$

dove la $f(\Delta_i)$ si deve intendere calcolata mediante i valori approssimati delle a_{0s}, delle coordinate λ_0, φ_0 e del tempo origine H_0. Cioè:

$$E_i = f[\Delta(\lambda_0, \varphi_0; \lambda_i, \varphi_i), a_{0s}] - f[\Delta(\lambda, \varphi; \lambda_i, \varphi_i), a_s] + H_0 - H \tag{23}$$

d'onde linearizzando:

$$E_i = \left(\frac{\partial f}{\partial \Delta}\right)_i \left(\frac{\partial \Delta}{\partial \lambda}\right)_i \zeta + \left(\frac{\partial f}{\partial \varphi}\right)_i \left(\frac{\partial \Delta}{\partial \varphi}\right)_i \xi + \varepsilon + \sum_1^5{}_s \left(\frac{\partial f}{\partial a_s}\right)_i \vartheta_s\,. \tag{24}$$

Determinando le incognite ξ, ζ, ε, ϑ_s col metodo del minimi quadrati si dovrebbero trovare le coordinate dell'epicentro e il tempo origine e i coefficienti dell'equazione della parabola che approssima la dromocrona, una volta fissatone il grado. Si vede subito che il calcolo numerico per l'applicazione del metodo risulta molto laborioso.

È stato applicato ai dati precedentemente utilizzati e si è trovato che, mentre i valori di λ_0 e φ_0 non subiscono scarti sensibili dai valori determinati con i diversi metodi, le a_{0s} ed H_0 assumono valori non accettabili.

APPENDICE

Per poter eseguire i calcoli numerici precedentemente esposti, è stato necessario calcolare la funzione $f(\Delta, h)$ per le onde P.

Sono stati presi 75 punti della funzione stessa ottenuti dando a Δ i 15 valori $\Delta_i = 30^0, 35^0, \ldots, 100^0$ e ad h i 5 valori $h_j = 0, 100, \ldots, 400$ km.

Si è posto:

$$f(\Delta, h) = a_1(h)\,\Delta + a_2(h)\,\Delta^2 + a_3(h)\,\Delta^3 + a_4(h)\,\Delta^4 + a_5(h)\,\Delta^5 \qquad (1)$$

con

$$a_1(h) = \alpha_0 + \alpha_1\,h + \alpha_2\,h^2 + \alpha_3\,h^3 + \alpha_4\,h^4 \qquad (2)$$

e formule analoghe per

$$a_2(h),\; a_3(h),\; a_4(h),\; a_5(h).$$

Fissato nella (1) il valore di $h\,(h = h_j)$, si sono determinate le cinque costanti:

$$a_1(h_j),\; a_2(h_j),\; a_3(h_j),\; a_4(h_j),\; a_5(h_j),$$

col metodo dei minimi quadrati, in modo cioè da rendere minima la funzione:

$$\sum_{1\,i}^{15}\left[a_1(h_j)\,\Delta_i + a_2(h_j)\,\Delta_i^2 + a_3(h_j)\,\Delta_i^3 + a_4(h_j)\,\Delta_i^4 + a_5(h_j)\,\Delta_i^5 - f(\Delta_i, h_j)\right]^2$$

ripetendo il calcolo per $j = 1, 2, 3, 4, 5$.

Si sono ottenuti i seguenti valori (con 6 cifre significative):

	$h = 0$	$h = 100$	$h = 200$	$h = 300$	$h = 400$
a_1	$1{,}57385.10$	$1{,}607$[illegible]8.10	$1{,}52843.10$	$1{,}48980.10$	$1{,}37915.10$
a_2	$-1{,}18121.10^{-1}$	$-1{,}71720.10^{-1}$	$-1{,}46406.10^{-1}$	$-1{,}44779.10^{-1}$	$-9{,}87346.10^{-2}$
a_3	$-5{,}26112.10^{-5}$	$1{,}46033.10^{-3}$	$1{,}06965.10^{-3}$	$1{,}20498.10^{-3}$	$3{,}32653.10^{-4}$
a_4	$1{,}13443.10^{-5}$	$-5{,}18642.10^{-6}$	$-2{,}48937.10^{-6}$	$-4{,}72478.10^{-6}$	$2{,}90141.10^{-6}$
a_5	$-6{,}47892.10^{-8}$	$-1{,}66161.10^{-9}$	$-8{,}19214.10^{-9}$	$-1{,}82414.10^{-9}$	$-2{,}31163.10^{-8}$

Successivamente, passando alle (2) e analoghe, si sono determinati i cinque coefficienti $\alpha_0, \alpha_1, \ldots\ldots, \alpha_4$ risolvendo il sistema:

$$\alpha_0 + \alpha_1 h + \alpha_2 h_j^2 + \alpha_3 h_j^3 + \alpha_4 h_j^4 = a(h_j)$$

$$(j = 1, 2, \ldots\ldots, n)$$

e si è ottenuto:

$$a_1(h) = 1{,}5739.10 + 2{,}0899.10^{-2}h - 2{,}5633.10^{-4}h^2 + 9{,}2503.10^{-7}h^3 - 1{,}1131.10^{-9}h^4$$
$$a_2(h) = -1{,}1812.10^{-1} - 1{,}6993.10^{-3}h + 1{,}6900.10^{-5}h^2 - 5{,}9776.10^{-8}h^3 + 7{,}1127.10^{-11}h^4$$
$$a_3(h) = -5{,}2611.10^{-5} + 4{,}2655.10^{-5}h - 3{,}9832.10^{-7}h^2 + 1{,}3958.10^{-9}h^3 - 1{,}6514.10^{-12}h^4$$
$$a_4(h) = 1{,}1344.10^{-5} - 4{,}3936.10^{-7}h + 3{,}9548.10^{-9}h^2 - 1{,}3765.10^{-11}h^3 + 1{,}6231.10^{-14}h^4$$
$$a_5(h) = -6{,}4789.10^{-8} + 1{,}6112.10^{-9}h - 1{,}4105.10^{-11}h^2 + 4{,}8794.10^{-14}h^3 - 5{,}7378.10^{-17}h^4$$

Roma, Istituto Nazionale di Geofisica del C.N.R., luglio 1943.

BIBLIOGRAFIA

(1) J. N. ADKINS, *The Alaskan Earthquake of July 22, 1937.* « Bulletin of the Seismological Society of America », vol. XXX, 1940.

(2) P. E. VALLE, *Nuovo metodo per la determinazione delle coordinate ipocentrali di un terremoto lontano.* « Reale Accademia d'Italia », fasc. XI, serie VII, vol. III, 1942.