PUBBLICAZIONI
DELL'ISTITUTO NAZIONALE DI GEOFISICA

N. 119

N. 120

PIETRO CALOI

Sulla propagazione delle onde di Rayleigh in un mezzo elastico firmo-viscoso stratificato

ROMA
ANNO 1946

Estratto dai « *Rendiconti dell'Accademia Nazionale dei Lincei* »
(Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali)
serie VIII, vol. I, fasc. 6

Roma, 1946. — Dott. G. Bardi, Tipografo dell'Accademia Nazionale dei Lincei.

In una Nota precedente abbiamo considerato la propagazione delle onde di Rayleigh in un mezzo elastico, firmo-viscoso, indefinito. Consideriamo ora il caso di due strati solidi sovrapposti, con densità e coefficienti elastici e firmo-viscosi costanti.

Riferiamo lo strato superficiale, poggiante sopra un mezzo solido semi-infinito, ad un sistema di assi xz, con l'asse x giacente sulla superficie di separazione dei due strati, nella direzione di propagazione delle onde, e l'asse z diretto normalmente verso l'alto.

Siano λ_1, μ_1, ρ_1 ; λ', μ' le costanti elastiche, la densità e le costanti firmo-viscose dello strato superficiale di spessore d, e λ_2, μ_2, ρ_2 ; λ'', μ'' le analoghe costanti proprie del mezzo sottostante.

Si sa che, nel caso bidimensionale, le componenti dello spostamento, determinato in un mezzo sollecitato da onde spaziali, possono essere espresse dalle relazioni

$$(1) \qquad u = \frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{\partial \Phi}{\partial z}, \quad w = \frac{\partial \psi}{\partial z} + \frac{\partial \Phi}{\partial x}$$

dove ψ è funzione caratteristica per le onde longitudinali e Φ per quelle trasversali. Le equazioni del moto nello strato superficiale sono pertanto

$$(2) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 \psi_1}{\partial t^2} = \left\{ \dfrac{\lambda_1 + 2\mu_1}{\rho_1} + \dfrac{\lambda' + 2\mu'}{\rho_1} \dfrac{\partial}{\partial t} \right\} \Delta_2 \psi_1 , \\ \dfrac{\partial^2 \Phi_1}{\partial t^2} = \dfrac{1}{\rho_1} \left(\mu_1 + \mu' \dfrac{\partial}{\partial t} \right) \Delta_2 \Phi_1 . \end{cases}$$

Per lo strato superficiale, facciamo le posizioni

$$(3) \qquad \begin{aligned} \psi_1 &= \{ C \sinh r_1 z + D \cosh r_1 z \} e^{i(pt - fx)}, \\ \Phi_1 &= \{ E \sinh s_1 z + F \cosh s_1 z \} e^{i(pt - fx)} . \end{aligned}$$

Dalle (2), tenuto conto delle (3), si ha

$$p^2 = (f^2 - r_1^2)\,\frac{1}{\rho_1}\,[\lambda_1 + 2\,\mu_1 + ip\,(\lambda' + 2\,\mu')],$$

$$p^2 = (f^2 - s_1^2)\,\frac{1}{\rho_1}\,[\mu_1 + ip\,\mu'].$$

Da cui, fatto

$$h_1^2 = \frac{\rho_1\,p^2}{\lambda_1 + 2\,\mu_1 + ip\,(\lambda' + 2\,\mu')} \quad , \quad k_1^2 = \frac{\rho_1\,p^2}{\mu_1 + ip\,\mu'}, \tag{4}$$

consegue

$$r_1^2 = f^2 - h_1^2 \quad , \quad s_1^2 = f^2 - k_1^2. \tag{5}$$

Per le (1) si ha ancora

$$\begin{cases} u_1 = \{-if\,(\mathrm{C}\sinh r_1 z + \mathrm{D}\cosh r_1 z) - s_1\,(\mathrm{E}\cosh s_1 z + \mathrm{F}\sinh s_1 z)\}\,e^{i(pt-fx)} \\ w_1 = \{r_1\,(\mathrm{C}\cosh r_1 z + \mathrm{D}\sinh r_1 z) - if\,(\mathrm{E}\sinh s_1 z + \mathrm{F}\cosh s_1 z)\}\,e^{i(pt-fx)}. \end{cases} \tag{6}$$

Relativamente al secondo mezzo, facciamo le posizioni

$$\psi_2 = \mathrm{A}e^{r_2 z}\cdot e^{i(pt-fx)} \quad , \quad \Phi_2 = \mathrm{B}e^{s_2 z}\cdot e^{i(pt-fx)}. \tag{7}$$

Si deduce allora, tenuto conto dell'equazioni del moto, analoghe alle (2),

$$r_2^2 = f^2 - h_2^2 \quad , \quad s_2^2 = f^2 - k_2^2, \tag{8}$$

dove

$$h_2^2 = \frac{\rho_2\,p^2}{\lambda_2 + 2\,\mu_2 + ip\,(\lambda'' + 2\,\mu'')} \quad , \quad k_2^2 = \frac{\rho_2\,p^2}{\mu_2 + ip\,\mu''}.$$

È inoltre

$$\begin{cases} u_2 = -\{if\,\mathrm{A}e^{r_2 z} + s_2\,\mathrm{B}e^{s_2 z}\}\,e^{i(pt-fx)} \\ w_2 = \{r_2\,\mathrm{A}e^{r_2 z} - if\,\mathrm{B}e^{s_2 z}\}\,e^{i(pt-fx)}. \end{cases} \tag{9}$$

Le condizioni da soddisfare sulla superficie di discontinuità ($z = 0$) e sulla superficie esterna ($z = d$), sono: sulla superficie di discontinuità (uguaglianza degli spostamenti nei due strati e delle tensioni normale e tangenziale N_3, T_2 rispettivamente)

$$(\mathrm{I})_0 \quad \begin{cases} u_1 = u_2 \quad , \quad w_1 = w_2 \\[2mm] \lambda_1\,\vartheta_1 + 2\,\mu_1\,\dfrac{\partial w_1}{\partial z} + \dfrac{\partial}{\partial t}\left(\lambda'\,\vartheta_1 + 2\,\mu'\,\dfrac{\partial w_1}{\partial z}\right) = \\[2mm] \qquad = \lambda_2\,\vartheta_2 + 2\,\mu_2\,\dfrac{\partial w_2}{\partial z} + \dfrac{\partial}{\partial t}\left(\lambda''\,\vartheta_2 + 2\,\mu''\,\dfrac{\partial w_2}{\partial z}\right) \\[2mm] \mu_1\left(\dfrac{\partial w_1}{\partial x} + \dfrac{\partial u_1}{\partial z}\right) + \mu'\,\dfrac{\partial}{\partial t}\left(\dfrac{\partial w_1}{\partial x} + \dfrac{\partial u_1}{\partial z}\right) = \\[2mm] \qquad = \mu_2\left(\dfrac{\partial w_2}{\partial x} + \dfrac{\partial u_2}{\partial z}\right) + \mu''\,\dfrac{\partial}{\partial t}\left(\dfrac{\partial w_2}{\partial x} + \dfrac{\partial u_2}{\partial z}\right), \end{cases}$$

e, sulla superficie esterna (per l'annullarsi delle tensioni normale e tangenziale)

$$(\mathrm{I})_d \quad \begin{cases} \lambda_1 \vartheta_1 + 2\,\mu_1 \dfrac{\partial w_1}{\partial z} + \dfrac{\partial}{\partial t}\left(\lambda' \vartheta_1 + 2\,\mu' \dfrac{\partial w_1}{\partial z}\right) = 0 \\ \mu_1 \left(\dfrac{\partial w_1}{\partial x} + \dfrac{\partial u_1}{\partial z}\right) + \mu' \dfrac{\partial}{\partial t}\left(\dfrac{\partial w_1}{\partial x} + \dfrac{\partial u_1}{\partial z}\right) = 0\,, \end{cases}$$

dove le dilatazioni cubiche assumono l'espressione

$$\vartheta_1 = \Delta_2 \psi_1 \quad , \quad \vartheta_2 = \Delta_2 \psi_2\,,$$

essendo Δ_2 l'operatore di Laplace.

Ricordando che

$$(\Delta_2 + h_1^2)\,\psi_1 = 0 \quad , \quad (\Delta_2 + k_1^2)\,\Phi_1 = 0\,,$$

si ottiene

$$(\alpha) \qquad (\mathrm{N}_3)_1 = (\mu_1 + ip\,\mu') \left\{ - k_1^2 \psi_1 + 2\left(\frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial x\, \partial z} - \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x^2}\right)\right\}$$

$$(\beta) \qquad (\mathrm{T}_2)_1 = (\mu_1 + ip\,\mu') \left\{ 2\,\frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x\, \partial z} - k_1^2 \Phi_1 - 2\,\frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial z^2} \right\}.$$

Intanto, le prime delle $(\mathrm{I})_0$ dànno, sulla superficie di discontinuità,

$$(\mathrm{II}) \quad \begin{cases} -if\cdot \mathrm{D} - s_1 \cdot \mathrm{E} = -if\mathrm{A} - s_2 \cdot \mathrm{B} \\ r_1 \cdot \mathrm{C} - if\cdot \mathrm{F} = r_2\,\mathrm{A} - if\cdot \mathrm{B}\,. \end{cases}$$

Dalla (α), tenendo presenti le espressioni di ψ_1, Φ_1, e prescindendo dal fattore $e^{i(pt - fx)}$,

$$(\mathrm{N}_3)_1 = \rho_1 \frac{p^2}{k_1^2}(2 f^2 - k_1^2)\cdot \mathrm{D} - 2\, i\rho_1 \frac{p^2}{k_1^2} s_1 f\cdot \mathrm{E}$$

e, analogamente,

$$(\mathrm{N}_3)_2 = \rho_2 \frac{p^2}{k_2^2}(2 f^2 - k_2^2)\cdot \mathrm{A} - 2\, i\rho_2 \frac{p^2}{k_2^2} s_1 f\cdot \mathrm{B}.$$

Per cui, dalla terza delle $(\mathrm{I})_0$,

$$(\mathrm{III}) \qquad -(2 f^2 - k_2^2)\cdot \mathrm{A} + 2\, is_2 f\cdot \mathrm{B} +$$

$$+ \frac{\rho_1}{\rho_2}\frac{k_2^2}{k_1^2}\{2 f^2 - k_1^2\}\cdot \mathrm{D} - 2\, i\,\frac{\rho_1}{\rho_2}\frac{k_2^2}{k_1^2} s_1 f\cdot \mathrm{E} = 0\,.$$

Dalla (β), a meno del solito fattore, si ottiene per la superficie di discontinuità,

$$(\mathrm{T}_2)_1 = \frac{p^2 \rho_1}{k_1^2}\{-2\, if r_1\, \mathrm{C} - (2 f^2 - k_1^2)\cdot \mathrm{F}\}$$

$$(\mathrm{T}_2)_2 = \frac{p^2 \rho_2}{k_2^2}\{-2\, if r_2\, \mathrm{A} - (2 f^2 - k_2^2)\cdot \mathrm{B}\}.$$

Per la quarta delle $(\mathrm{I})_0$ consegue

$$(\mathrm{IV}) \quad 2ifr_2\cdot \mathrm{A} + (2f^2 - k_2^2)\cdot \mathrm{B} - 2i\frac{\rho_1}{\rho_2}\frac{k_2^2}{k_1^2} fr_1\cdot \mathrm{C} - \frac{\rho_1}{\rho_2}\frac{k_2^2}{k_1^2}(2f^2 - k_1^2)\cdot \mathrm{F} = 0 .$$

Sempre ricordando le (α), (β) e tenuto presente che

$$2s_1^2 + k_1^2 = 2f^2 - k_1^2 ,$$

per le $(\mathrm{I})_d$ si ha ancora, sulla superficie esterna,

$$(\mathrm{V}) \quad (2f^2 - k_1^2)\sinh r_1 d\cdot \mathrm{C} + (2f^2 - k_1^2)\cosh r_1 d\cdot \mathrm{D} -$$
$$- 2ifs_1 \cosh s_1 d\cdot \mathrm{E} - 2ifs_1 \sinh s_1 d\cdot \mathrm{F} = 0$$

$$(\mathrm{VI}) \quad - 2ifr_1 \cosh r_1 d\cdot \mathrm{C} - 2ifr_1 \sinh r_1 d\cdot \mathrm{D} -$$
$$- (2f^2 - k_1^2)\sinh s_1 d\cdot \mathrm{E} - (2f^2 - k_1^2)\cosh s_1 d\cdot \mathrm{F} = 0 .$$

Le due equazioni (II), le (III), (IV), (V) e (VI) costituiscono un sistema di sei equazioni lineari nelle sei incognite A, B, C, D, E, F. L'eliminazione di dette incognite richiede l'annullarsi del determinante dei coefficienti delle medesime. Si ha:

$$(10) \quad \begin{vmatrix} +if & +s_2 & 0 & -if & -s_1 & 0 \\ -r_2 & +if & r_1 & 0 & 0 & -if \\ -(2f^2-k_2^2) & +2ifs_2 & 0 & \frac{\rho_1}{\rho_2}\frac{k_2^2}{k_1^2}(2f^2-k_1^2) & -2i\frac{\rho_1}{\rho_2}\frac{k_2^2}{k_1^2}s_1 f & 0 \\ 2ifr_2 & 2f^2-k_2^2 & -2i\frac{\rho_1}{\rho_2}\frac{k_2^2}{k_1^2}fr_1 & 0 & 0 & -\frac{\rho_1}{\rho_2}\frac{k_2^2}{k_1^2}(2f^2-k_1^2) \\ 0 & 0 & (2f^2-k_1^2)\sinh r_1 d & (2f^2-k_1^2)\cosh r_1 d & -2ifs_1\cosh s_1 d & -2ifs_1\sinh s_1 d \\ 0 & 0 & -2ifr_1\cosh r_1 d & -2ifr_1\sinh r_1 d & -(2f^2-k_1^2)\sinh s_1 d & -(2f^2-k_1^2)\cosh s_1 d \end{vmatrix} = 0.$$

L'equazione determinante (10) consente la determinazione della velocità di propagazione delle onde di Rayleigh nello strato superficiale.

Nell'ipotesi $\rho_1 \sim \rho_2$, la (10) può scriversi

$$
\begin{aligned}
(11)\quad & -8\frac{f^2}{k_1^2}\cdot\frac{r_1 s_1}{k_1^2}\left(2\frac{f^2}{k_1^2}-1\right)\left(1-\frac{k_2^2}{k_1^2}\right)\left\{2\frac{f^2}{k_1^2}\left(1-\frac{k_2^2}{k_1^2}\right)\left(\frac{r_2 s_2}{k_1^2}-\frac{f^2}{k_1^2}\right)+\right.\\
& \left.+\frac{k_2^2}{k_1^2}\left(\frac{r_2 s_2}{k_1^2}+\frac{f^2}{k_1^2}\right)\right\}+\left\{4\frac{f^2}{k_1^2}\cdot\frac{r_1 s_1}{k_1^2}\cosh r_1 d\cdot\cosh s_1 d-\left(2\frac{f^2}{k_1^2}-1\right)^2\sinh r_1 d\cdot\sinh s_1 d\right\}\cdot\\
& \cdot\left\{-4\frac{f^6}{k_1^6}\left(1-\frac{k_2^2}{k_1^2}\right)^2+\frac{r_2 s_2}{k_1^2}\left[4\frac{f^2}{k_1^2}\frac{k_2^2}{k_1^2}\left(1-\frac{k_2^2}{k_1^2}\right)+4\frac{f^4}{k_1^4}\left(1-2\frac{k_2^2}{k_1^2}\right)+\frac{k_2^4}{k_1^4}\left(1+4\frac{f^4}{k_1^4}\right)\right]\right\}+\\
& +\left\{4\frac{f^2}{k_1^2}\frac{r_1 s_1}{k_1^2}\sinh r_1 d\cdot\sinh s_1 d-\left(2\frac{f^2}{k_1^2}-1\right)^2\cosh r_1 d\cdot\cosh s_1 d\right\}\cdot\\
& \cdot\left\{-4\frac{f^2}{k_1^2}\frac{r_1 r_2}{k_1^2}\frac{s_1 s_2}{k_1^2}\left(1-\frac{k_2^2}{k_1^2}\right)^2+\frac{r_1 s_1}{k_1^2}\left[4\frac{f^4}{k_1^4}\left(1-2\frac{k_2^2}{k_1^2}\right)-4\frac{f^2}{k_1^2}\frac{k_2^2}{k_1^2}\left(1-\frac{k_2^2}{k_1^2}\right)+\frac{k_2^4}{k_1^4}\left(1+4\frac{f^4}{k_1^4}\right)\right]\right\}+\\
& +\left\{4\frac{f^2}{k_1^2}\frac{r_1 s_1}{k_1^2}\sinh r_1 d\cdot\cosh s_1 d-\left(2\frac{f^2}{k_1^2}-1\right)^2\cosh r_1 d\cdot\sinh s_1 d\right\}\frac{r_1 s_2}{k_1^2}\frac{k_2^4}{k_1^4}+\\
& +\left\{4\frac{f^2}{k_1^2}\frac{r_1 s_1}{k_1^2}\cosh r_1 d\cdot\sinh s_1 d-\left(2\frac{f^2}{k_1^2}-1\right)^2\sinh r_1 d\cdot\cosh s_1 d\right\}\frac{r_2 s_1}{k_1^2}\frac{k_2^4}{k_1^4}=0\,.
\end{aligned}
$$

Nella (11) $\frac{2\pi}{f}$ è la lunghezza d'onda (L) e $p=\frac{2\pi}{T}$, essendo T il periodo. È inoltre

$$
\begin{aligned}
\frac{s_1}{k_1} &= \sqrt{\frac{f^2}{k_1^2}-1} \quad ; & s_1 d &= \frac{2\pi}{L}\,d\sqrt{1-\frac{k_1^2}{f^2}}\,,\\
\frac{r_1}{k_1} &= \sqrt{\frac{f^2}{k_1^2}-\frac{h_1^2}{k_1^2}} \quad ; & r_1 d &= 2\pi\frac{d}{L}\sqrt{1-\frac{h_1^2}{k_1^2}\frac{k_1^2}{f^2}}\,,\\
\frac{s_2}{k_1} &= \sqrt{\frac{f^2}{k_1^2}-\frac{k_2^2}{k_1^2}} \quad ; & \frac{r_2}{k_1} &= \sqrt{\frac{f^2}{k_1^2}-\frac{h_2^2}{k_1^2}}\,.
\end{aligned}
$$

La (11) va risolta rispetto a k_1/f, che esprime il rapporto fra la velocità delle onde superficiali di Rayleigh e la velocità delle onde trasversali, proprie del mezzo [1].

(1) A questo scopo, devono essere assegnati valori ai rapporti $\frac{h_1^2}{k_1^2}, \frac{h_2^2}{k_1^2}, \frac{k_2^2}{k_1^2}$. Scegliendo per la costante di Poisson il valore 0,25 e osservando che, in tal caso, $\lambda'=-\frac{2}{3}\mu'$, si ha

$$
(\gamma)\qquad \frac{h_1^2}{k_1^2}=\frac{1}{3}\,\frac{1}{1-\frac{5}{9}\cdot\frac{1}{\frac{9}{4p^2}\left(\frac{\mu_1}{\mu'}\right)^2+1}}+ip\,\frac{15\frac{\mu_1}{\mu^1}}{81\left(\frac{\mu_1}{\mu^1}\right)^2+16p^2}\,.
$$

Determiniamo ora l'espressione dal rapporto fra l'ampiezza del moto orizzontale e quella del moto verticale.

Tenendo conto della (V), si ha dalla prima delle (6) – a meno del fattore esponenziale $e^{i(pt-fx)}$ –, sulla superficie esterna

$$(u_1)_{z=d} = \frac{k_1^2 s_1}{2f^2 - k_1^2} (\mathrm{E} \cosh s_1 d + \mathrm{F} \sinh s_1 d).$$

Dalla (VI), in base alla seconda delle (6), l'ampiezza del moto verticale sulla superficie esterna, a meno del solito fattore, assume l'espressione,

$$(w_1)_{z=d} = -i \frac{k_1^2}{2f} (\mathrm{E} \sinh s_1 d + \mathrm{F} \cosh s_1 d).$$

Consegue per le (5),

$$(12) \qquad \left(\frac{u_1}{w_1}\right)_{z=d} = i \frac{\sqrt{1 - \frac{k_1^2}{f^2}}}{1 - \frac{k_1^2}{2f^2}} \frac{1 + \frac{\mathrm{F}}{\mathrm{E}} \operatorname{tangh} s_1 d}{\operatorname{tangh} s_1 d + \frac{\mathrm{F}}{\mathrm{E}}}.$$

Resta da determinare l'espressione di F/E.

Dalla prima delle (II) moltiplicate per $-\frac{i}{f} \frac{\rho_1}{\rho_2} \frac{k_2^2}{k_1^2} (2f^2 - k_1^2)$ e sommata alla (III), osservando che, sulla superficie di discontinuità, per $\rho_1 \sim \rho_2$,

$$\frac{k_2^2}{k_1^2} = \frac{\mu_1 + ip\mu'}{\mu_2 + ip\mu''},$$

È ancora

$$\frac{h_2^2}{k_1^2} = \frac{27\frac{\mu_1}{\mu_2} + 12p^2 \frac{\mu'}{\mu_2} \frac{\mu''}{\mu_2}}{81 + 16p^2 \left(\frac{\mu''}{\mu_2}\right)^2} + ip \frac{27\frac{\mu'}{\mu_2} - 12\frac{\mu_1}{\mu_2}\frac{\mu''}{\mu_2}}{81 + 16p^2\left(\frac{\mu''}{\mu_2}\right)^2};$$

$$\frac{k_2^2}{k_1^2} = \frac{\mu_1\mu_2 + p^2\mu'\mu''}{\mu_2^2 + p^2\mu''^2} + ip \frac{\frac{\mu'}{\mu_2} - \frac{\mu_1}{\mu_2}\frac{\mu''}{\mu_2}}{1 + p^2\left(\frac{\mu''}{\mu_2}\right)^2}$$

e se si suppone (come si verifica con buona approssimazione per la crosta terrestre) $\mu' \sim \mu''$,

$$(\delta) \qquad \frac{h_2^2}{k_1^2} = \frac{27\frac{\mu_1}{\mu_2} + 12p^2\left(\frac{\mu'}{\mu_2}\right)^2}{81 + 16p^2\left(\frac{\mu'}{\mu_2}\right)^2} + ip\frac{\mu'}{\mu^2} \frac{27 - 12\frac{\mu_1}{\mu_2}}{81 + 16p^2\left(\frac{\mu'}{\mu_2}\right)^2};$$

$$(\varepsilon) \qquad \frac{k_2^2}{k_1^2} = \frac{\frac{\mu_1}{\mu_2} + p^2\left(\frac{\mu'}{\mu_2}\right)^2}{1 + p^2\left(\frac{\mu'}{\mu_2}\right)^2} + ip\frac{\mu'}{\mu_2} \frac{1 - \frac{\mu'}{\mu_2}}{1 + p^2\left(\frac{\mu'}{\mu_2}\right)}.$$

La (11) va risolta, tenendo conto delle (γ), (δ), (ε), assegnando valori (da variarsi opportunamente) ai rapporti d/L, p, μ'/μ_2, μ'/μ_1, μ_1/μ_2. Una soluzione in questo senso è stata già da tempo proposta all'Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo.

fatte le posizioni

$$(13) \qquad \chi = \frac{2 f^2}{k_2^2}\left(1 - \frac{k_2^2}{k_1^2}\right) \quad , \quad \psi = 1 + \chi ,$$

si ottiene

$$(14) \qquad \frac{s_1 \mathrm{E}}{f} = i\chi \mathrm{A} + \frac{s_2}{f}\psi \mathrm{B} .$$

Sempre sulla superficie di discontinuità, dalla seconda delle (II) moltiplicata per $2 i \frac{\rho_1}{\rho_2} \cdot \frac{k_2^2}{k_1^2} \cdot f$ e sommata alla (IV), posto

$$(15) \qquad \varphi = 2\left(1 - \frac{k_2^2}{k_1^2}\right) \quad , \quad \zeta = 1 - \frac{2 f^2}{k_2^2}\left(1 - \frac{k_2^2}{k_1^2}\right) = 1 - \chi ,$$

si deduce

$$(16) \qquad -\mathrm{F} = i \frac{f r_2}{k_2^2} \varphi \mathrm{A} - \zeta \mathrm{B} .$$

La prima delle (II) moltiplicata per $-2 i f \frac{\rho_1}{\rho_2} \frac{k_2^2}{k_1^2}$ e sommata alla (III), dà, sulla superficie di discontinuità,

$$(17) \qquad \mathrm{D} = \zeta \mathrm{A} + i \frac{f s_2}{k_2^2} \varphi \mathrm{B} ,$$

mentre la seconda delle (II), moltiplicata per $\frac{i}{f} \cdot \frac{\rho_1}{\rho_2} \cdot \frac{k_2^2}{k_1^2}(2 f^2 - k_1^2)$ e sommata alla (IV), conduce, sulla superficie di discontinuità, alla relazione

$$(18) \qquad \frac{r_1}{f} \mathrm{C} = \frac{r_2}{f} \psi \cdot \mathrm{A} - i\chi \cdot \mathrm{B} .$$

Dalla (V), tenendo conto delle (14), (16), (17) e (18), consegue

$$\left\{\left(\frac{k_1^2}{f^2} - 2\right)\left(\zeta \cosh r_1 d + \frac{r_2}{r_1}\psi \sinh r_1 d\right) - 2\left(-\frac{r_2 s_1}{k_2^2}\varphi \sinh s_1 d + \chi \cosh s_1 d\right)\right\} \cdot \mathrm{A} +$$

$$+ i\left\{\left(\frac{k_1^2}{f^2} - 2\right)\left(\frac{f s_2}{k_2^2}\varphi \cosh r_1 d - \frac{f}{r_1}\chi \sinh r_1 d\right) + 2\left(\frac{s_1}{f}\zeta \sinh s_1 d + \frac{s_2}{f}\psi \cosh s_1 d\right)\right\} \cdot \mathrm{B} = 0 .$$

Posta la prima parentesi $\{\cdots\} = \xi$ e la seconda $\{\cdots\} = \eta$, avremo

$$\xi \mathrm{A} + i\eta \mathrm{B} = 0 ,$$

da cui

$$\frac{\mathrm{B}}{\mathrm{A}} = i \frac{\xi}{\eta} .$$

Consegue

$$(19) \qquad \frac{\mathrm{F}}{\mathrm{E}} = \frac{-i \frac{f r_2}{k_2^2}\varphi \mathrm{A} + \zeta \mathrm{B}}{i \frac{f\chi}{s_1}\mathrm{A} + \frac{s_2}{s_1}\psi \mathrm{B}} = \frac{s_1}{f} \frac{-\frac{f r_2}{k_2^2}\varphi + \zeta \frac{\xi}{\eta}}{\chi + \frac{s_2}{f}\psi \frac{\xi}{\eta}} ,$$

dove $\chi, \psi, \varphi, \zeta$ hanno le espressioni date dalle (13), (15).

Determinati, mediante le (11), i valori della velocità, è quindi possibile ottenere anche quelli del rapporto fra l'ampiezza dello spostamento orizzontale e quella dello spostamento verticale.

Quando $k_1^2 > f^2 > h_1^2$ le soluzioni soggette alle condizioni superficiali si ottengono sostituendo $\cosh s_1 z$ e $\sinh s_1 z$ con $\cos s_1 z$ e $\sin s_1 z$; e quando $h_1^2 > f^2$, similmente $\cos r_1 z$ e $\sin r_1 z$ vanno messi in luogo di $\cosh r_1 z$ e $\sinh r_1 z$. In questi casi

$$(12^{bis}) \qquad \left(\frac{u_1}{w_1}\right)_{z=d} = i\,\frac{\sqrt{\dfrac{k_1^2}{f^2}-1}}{1-\dfrac{k_1^2}{2f^2}}\;\frac{1-\dfrac{F}{E}\operatorname{tang} s_1 d}{\operatorname{tang} s_1 d+\dfrac{F}{E}},$$

dove l'espressione di F/E è formalmente identica alla (19).

Il valore di u/w non è quindi costante, come si verifica nella classica teoria di Rayleigh, ma è funzione della lunghezza d'onda (come del resto si è già trovato nel caso del mezzo indefinito).

È facile provare che le onde in questione sono effettivamente onde di Rayleigh.

Se lo spessore d dello strato superficiale tende a diventare grande oltre ogni limite, $\operatorname{tangh} s_1 d$ tende all'unità e la (12) diventa

$$(20) \qquad \left(\frac{u_1}{w_1}\right)_{z=d} = i\,\frac{\sqrt{1-\dfrac{k_1^2}{f^2}}}{1-\dfrac{k_1^2}{2f^2}}\,;$$

ma poichè $\dfrac{k_1^2}{f^2} = V_R^2\dfrac{1}{v_2^2}$ – dove V_R esprime la velocità delle onde di Rayleigh e v_2 la velocità delle onde trasversali proprie del mezzo – la (20) coincide, in valore assoluto, con l'espressione che il rapporto u/w assume nella teoria di Rayleigh, per onde propagantisi alla superficie di un mezzo elastico, semi-infinito, non stratificato.

Osserviamo ancora che, per grossi valori degli argomenti $s_1 d$, $r_1 d$ le funzioni iperboliche tendono ad uguagliarsi. Dalle (V), (VI) si ha allora

$$(21) \qquad (2f^2-k_1^2)^2 = 4f^2 r_1 s_1\,,$$

relazione che consente di determinare k_1/f, e quindi V_R. Infatti, poichè, come si deduce dalle (5),

$$\frac{r_1^2 s_1^2}{f^4} = \left[1-\left(\frac{V_R}{v_1}\right)^2\right]\cdot\left[1-\left(\frac{V_R}{v_2}\right)^2\right],$$

dove v_1 è la velocità delle onde longitudinali spaziali, dalla (21) viene

$$\left(2-\frac{V_R^2}{v_2^2}\right)^4 = 16\left(1-\frac{V_R^2}{v_1^2}\right)\left(1-\frac{V_R^2}{v_2^2}\right),$$

che è l'equazione classica delle onde di Rayleigh.