

R. CIALDEA - A. LO SURDO - G. ZANOTELLI

**Influenza della carica spaziale
sul funzionamento delle sonde radioattive**

ROMA 1948

Estratto da *Annali di Geofisica*

Vol. I, n. 2, 1948, pag. 155

STAMPATO DALL'ISTITUTO GRAFICO TIBERINO (ROMA - VIA GAETA 14)

Nell'uso delle sonde radioattive come egualizzatori di potenziale per la misura del campo elettrico si constata l'esistenza di alcune cause di errore, tra cui l'influenza delle dimensioni non trascurabili delle sonde, della lunghezza del percorso utile delle radiazioni ionizzanti, e delle perturbazioni apportate dalla carica spaziale alla configurazione del campo elettrico. Esperienze recenti ⁽¹⁾ hanno indicato la via da seguire per ridurre l'importanza di queste cause d'errore e per costruire nuovi tipi di sonde.

Nel presente lavoro ci siamo proposti di studiare l'influenza della carica spaziale sul potenziale misurato da una sonda radioattiva, posta nel campo elettrico generato da due armature piane e parallele mantenute a differenza di potenziale costante. Poiché una trattazione corrispondente in tutti i particolari alle condizioni reali delle sonde di piccole dimensioni si presenta notevolmente complessa, ci siamo riferiti al caso più semplice di uno strato piano indefinito sottoposto ad azione ionizzante uniforme e compreso tra armature, ad esso parallele, pure indefinite. Questo studio ci ha permesso di stabilire in questo caso l'errore prodotto dalla presenza della carica spaziale nella determinazione del potenziale, anche in relazione alle dimensioni delle sonde reali ed alla lunghezza del percorso utile delle radiazioni ionizzanti.

Gli ioni positivi escono dallo strato soggetto all'agente ionizzante e si dirigono per effetto del campo elettrico verso l'armatura a potenziale più basso e quelli negativi verso l'armatura a potenziale più alto. Non terremo conto della diffusione, in quanto, come è noto, il suo effetto è apprezzabile solo nel caso che il campo sia debolissimo. Lo spazio interno al condensatore viene ad essere diviso in tre strati, il primo con carica spaziale positiva, quello intermedio

(1) R. CIALDEA - A. LO SURDO: *Annali di Geofisica* - I, 49 (1948).

(soggetto all'azione ionizzante) con cariche dei due segni, ed il terzo con carica spaziale negativa.

Conformemente a quanto accade nel funzionamento reale delle sonde, ammetteremo che la corrente elettrica, che attraversa il condensatore in condizioni di regime, si mantenga notevolmente minore di quella corrispondente alla saturazione; ciò equivale a dire che nello strato intermedio la ricombinazione deve essere rilevante in confronto alla ionizzazione, e che negli strati esterni l'effetto della carica spaziale deve essere notevole nei confronti della differenza di potenziale applicata.

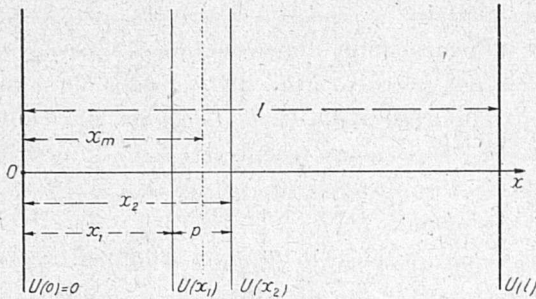


Fig. 1

Essendo assegnata la differenza costante di potenziale tra le armature, determiniamo la differenza di potenziale tra le facce dei tre strati; consideriamo la fig. 1 che rappresenta una porzione del condensatore indefinito comprendente lo strato soggetto all'azione ionizzante. Sia x l'ascissa generica di un punto nell'interno del condensatore, contata a partire dall'armatura di sinistra a potenziale più basso $U(0)$ che potremo porre uguale a zero $U(x_1)$ il potenziale della prima faccia dello strato di spessore p , soggetto all'agente ionizzante, posta in $x=x_1$; sia $U(x_2)$ il potenziale della seconda faccia, posta in $x=x_1+p=x_2$ ed infine $U(l)$ il potenziale dell'armatura di destra posta in $x=l$: indichiamo con $E(x)$ l'intensità del campo elettrico, diretto normalmente alle armature e con J la densità di corrente, costante in condizioni di regime. Siano k , n ed e le mobilità, le concentrazioni e le cariche degli ioni di ciascun segno.

Per il primo e l'ultimo strato, che contengono cariche di un solo segno, valgono le relazioni

$$\frac{dE}{dx} = 4\pi ne \quad , \quad J = kneE;$$

a partire da queste è possibile ottenere ⁽²⁾ il valore della differenza

⁽²⁾ J. J. THOMSON: *Conduction of Electricity through gases*. Cambridge, 75 (1903).

di potenziale tra le facce del primo strato, che contiene solo ioni positivi

$$V_1 = U(x_1) - U(0) = \sqrt{\frac{32 \pi}{9} \frac{J}{k_+} x_1^3} \quad , \quad [1]$$

ed analogamente tra le facce del terzo strato, che contiene solo ioni negativi

$$U(l) - U(x_2) = \sqrt{\frac{32 \pi}{9} \frac{J}{k_-} (l - p - x_2)^3} \quad [2]$$

Nello strato intermedio soggetto all'azione ionizzante valgono, oltre alle relazioni

$$\frac{dE}{dx} = 4\pi(n_+ + n_-)e \quad , \quad J = (k_+n_+ + k_-n_-)eE \quad ,$$

anche le seguenti, che considerano l'azione ionizzante e la ricombinazione

$$\frac{d}{dx}(n_+k_+E) = q - \alpha n_+n_- \quad , \quad - \frac{d}{dx}(n_-k_-E) = q - \alpha n_+n_-$$

ove q è il numero di ioni di ciascun segno prodotti dall'agente ionizzante per unità di volume nell'unità di tempo, ed α è il coefficiente di ricombinazione; da queste quattro relazioni è possibile ottenere ⁽³⁾, per approssimazione, la differenza di potenziale tra le facce dello strato, che è data, per l'aria in condizioni normali, da

$$U(x_2) - U(x_1) = \varrho p J \left(1 + 1,04 \frac{J}{J_s} \right) \quad [3]$$

ove

$$\varrho = \frac{\sqrt{\alpha/q}}{e(k_+ + k_-)} \quad [4]$$

e J indica la densità di corrente corrispondente alla saturazione.

Nelle condizioni normali di funzionamento, l'attività delle sonde è commisurata in modo che negli usuali campi elettrici la corrente si mantiene sempre molto più piccola di quella corrispondente alla saturazione, la cui densità è data da

$$J_s = q e p \quad , \quad [5]$$

tanto da poter trascurare nella relazione [3] l'ultimo termine.

⁽³⁾ G. ME: Ann. der Physik - 13, 887 (1904).

La differenza di potenziale V applicata tra le armature del condensatore deve soddisfare dunque alla seguente relazione che si ottiene sommando [1], [2] e [3]:

$$V = U(l) - U(0) = \sqrt{\frac{32\pi J}{9} \frac{J}{k_+} x_1^3} + \varrho p J + \sqrt{\frac{32\pi J}{9} \frac{J}{k_-} (l-p-x_1)^3}$$

Tra quest'ultima relazione e la [1] si può eliminare la J ottenendo

$$V = \frac{9}{32\pi} \frac{\varrho p k_+}{x_1^3} V_1^2 + \left[1 + \sqrt{\frac{k_+ (l-p-x_1)^3}{k_- x_1^3}} \right] V_1$$

Risolvendo rispetto a V_1 abbiamo infine

$$V_1 = \frac{F}{2B} \sqrt{(l-p)^3 x_1^3} \left[-1 \pm \sqrt{1 + \frac{4BV}{(l-p)^3 F^3}} \right], \quad [6]$$

in cui si è posto

$$B = \frac{9}{32\pi} \varrho p k_+ \quad [7] \quad \text{e} \quad F = \sqrt{\left(\frac{x_1}{l-p}\right)^3} + \sqrt{\frac{k_+}{k_-} \left(1 - \frac{x_1}{l-p}\right)^3}. \quad [8]$$

Va osservato che in queste relazioni per x_1 maggiore di $l-p$ lo spessore p dello strato soggetto all'azione ionizzante diminuisce, essendo il medesimo già in contatto con l'armatura di destra, in modo che per $l-p < x_1 \leq l$ si ha $p = l - x_1$.

Abbiamo messo in evidenza la funzione F perché il suo valore si aggira sempre intorno all'unità allorché la x_1 varia tra 0 e $l-p$: essa raggiunge il valore 1 per $x_1 = l-p$, ed assume il valore minimo per $x_1 = (l-p) k_+ / (k_+ + k_-)$, che è $F = \sqrt{k_+ / (k_+ + k_-)} = 0,65$, per l'aria in condizioni normali.

Poiché anche B è positivo occorre nella [6] scegliere la radice positiva, dovendo il potenziale V_1 risultare maggiore di zero. Come vedremo in seguito il termine $4BV / [(l-p)F]^3$ si mantiene notevolmente minore dell'unità, e potremo perciò sviluppare in serie il radicale

$$V_1 = V \frac{1}{F} \sqrt{\left(\frac{x_1}{l-p}\right)^3} \left[1 - \frac{1}{F^2} \frac{BV}{(l-p)^3} + \dots \right] \quad [9]$$

Prima di procedere, conviene farsi un'idea della grandezza del secondo termine in parentesi; in esso compare la B che, secondo le

[4], [5] e [7], risulta legata alla densità di corrente corrispondente alla saturazione dalla seguente relazione:

$$B = \frac{9}{32\pi} \frac{k_+}{k_+ + k_-} \sqrt{\frac{\alpha p^3}{e J_s}}, \quad [10]$$

che per l'aria in condizioni normali assume la forma

$$B = 2,22 \sqrt{\frac{P^3}{J_s}}$$

Per prendere in esame un caso reale riferiamoci alle determinazioni di cui ha fatto oggetto la nota già citata: le sonde ivi adoperate erano costituite da un piccolo disco metallico ricoperto su una delle sue facce piane da una sostanza radioattiva: precisamente polonio che emette soltanto particelle α , il cui percorso in aria in condizioni normali è di cm 3,87, e che non produce emanazione. Lo spazio soggetto all'azione ionizzante era limitato ad un piccolo volume attorno alla sonda, il quale poteva all'ingrosso supporre ionizzato uniformemente, per quanto sia ben noto che l'azione ionizzante si accentua verso l'estremo del percorso delle particelle; la emissione di particelle α dalla superficie attiva era tale da produrre una densità di corrente, corrispondente alla saturazione, dell'ordine di 10^{-10} amper/cm²; assumendo come spessore p il doppio circa della lunghezza del percorso delle particelle α , più lo spessore trasversale della sonda, cioè $p=8,8$ cm, si trova un valore di B , espresso nel sistema elettrostatico C.G.S., che si aggira attorno a 100. Per il condensatore adoperato in quelle esperienze, $l-p$ era di circa 80 cm e la differenza di potenziale applicata tra le armature era di 300 volt; con questi valori il termine $BV/(l-p)^3 F^2$ risulta di circa $2 \cdot 10^{-4}$, cioè assolutamente trascurabile di fronte all'unità. Poiché le sonde sono destinate in pratica a funzionare con campi elettrici che generalmente non eccedono quello considerato nel caso ora menzionato, e purché la distanza fra le armature del condensatore non sia eccessivamente piccola, per la differenza di potenziale ai capi del primo strato può senz'altro assumersi l'espressione

$$V_1 = V \frac{1}{F} \sqrt{\left(\frac{x_1}{l-p}\right)^3} = \frac{V}{1 + \sqrt{\frac{k_+}{k_-} \left(\frac{l-p}{x_1} - 1\right)^3}}. \quad [11]$$

Dalle [1], [3], [4] e [11] si ricava immediatamente la differenza di potenziale v ai capi dello strato intermedio.

$$v = U(x_2) - U(x_1) = B \frac{V_1^2}{x_1^3} = \frac{B V^2}{F^2 (l - p)^3} ;$$

peraltro tale differenza di potenziale è in generale assai piccola; nel nostro caso non raggiunge il decimo di volt; il suo andamento è rappresentato, al variare della posizione dello strato, dal grafico di fig. 2. La differenza di potenziale applicata al condensatore si raccoglie quasi per intero ai capi del primo e dell'ultimo strato, risultando trascurabile la caduta nello strato sede dell'azione ionizzante: quindi tale strato intermedio si può considerare, con buona approssimazione, come se fosse equipotenziale.

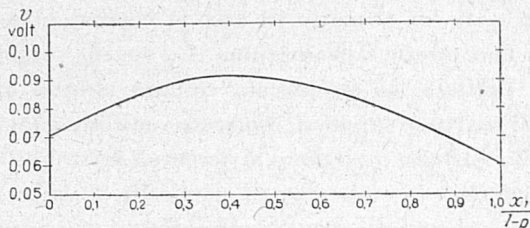


Fig. 2

Il diagramma di fig. 3-a rappresenta, nel caso $p=0,1 l$, l'andamento del potenziale dello strato soggetto all'azione ionizzante, praticamente equipotenziale, in funzione della distanza x_m del piano mediano

dello strato dalla armatura di sinistra, espressa in termini di x_m/l . Questo diagramma si ottiene dalla [11] sostituendo in essa al posto di x_1 la grandezza $x_m - p/2$: analogamente a quanto abbiamo fatto notare a proposito della [8], occorre osservare che per $0 \leq x_m < p/2$ e per $l - p/2 < x_m \leq l$, lo strato soggetto ad azione ionizzante è in contatto con le armature e ne assume il potenziale, che nel primo caso è zero e nel secondo è V . Per $p/2 \leq x_m \leq l - p/2$ il potenziale cresce con x_m , e non dipende dalle caratteristiche dell'agente ionizzante, ma solo dal potenziale applicato al condensatore, dalle distanze delle armature, dallo spessore dello strato in cui ha origine la ionizzazione, e dalle mobilità degli ioni. La retta tracciata dal diagramma rappresenta il potenziale statico in assenza dello strato soggetto all'agente ionizzante. Il punto di incontro tra la curva e la retta non si trova esattamente a distanza eguale dalle armature del condensatore; questa lieve differenza è da attribuirsi alla diversa mobilità degli ioni positivi e negativi.

La curva ora tracciata ci permette di studiare il potenziale che assumerebbe una sonda lateralmente indefinita e tale che lo spessore

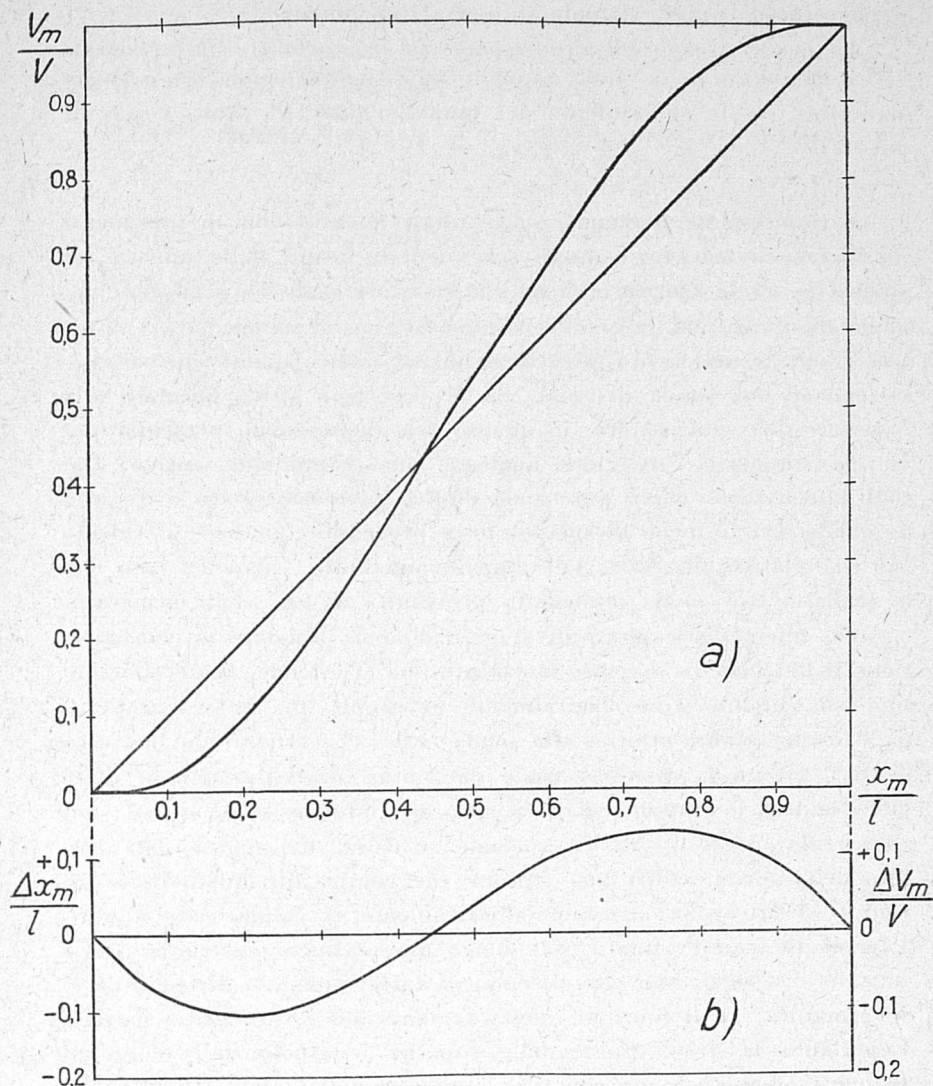


Fig. 3

della regione soggetta all'agente ionizzante fosse eguale a p . Il potenziale indicato dalla sonda risulta errato in difetto finché questa si trova più vicina all'armatura di sinistra, ed in eccesso allorché essa si trova più vicina a quella di destra. Nel primo caso perciò la sonda assu-

merebbe il potenziale di un punto più a sinistra della sua posizione reale, nel secondo quello di un punto più a destra; ci si riporta così al concetto di punto virtuale di presa del potenziale.

La curva di fig. 3-b rappresenta sia lo scarto tra il potenziale statico in assenza della sonda e quello indicato dalla sonda stessa (scala di destra), sia lo spostamento del punto virtuale di presa (scala di sinistra).

E' interessante paragonare i risultati ottenuti con le precedenti considerazioni teoriche e quelli sperimentali forniti dalla misura del potenziale tra le armature di un condensatore reale eseguita con una sonda di dimensioni finite. Prendiamo in considerazione, fra i risultati riportati nel lavoro precedentemente citato, quelli che si riferiscono ad una sonda disposta con la superficie attiva normale alle armature del condensatore, in quanto tale disposizione presenta, per la sua simmetria, maggiore analogia con il modello teorico. Dal confronto si rileva che il potenziale effettivamente misurato si discosta da quello statico meno di quanto fosse prevedibile in base al calcolo teorico, relativo alla sonda lateralmente indefinita, salvo nel caso che la sonda si trovi nella immediata prossimità di una delle armature.

Per interpretare questa divergenza occorre prendere in considerazione il fatto che la sorgente ionizzante non si estende, come abbiamo supposto, su uno strato lateralmente indefinito, ma è localizzata in un ristretto volume attorno alla sonda reale. Osserviamo che nel caso teorico trattato la carica spaziale determina uno spostamento delle intere superficie equipotenziali rispetto alla loro posizione statica: nel caso reale invece, la carica spaziale si trova, dall'uno e dall'altro lato della sonda, entro una regione che comprende quelle linee di campo elettrico che investono effettivamente il volume soggetto all'azione ionizzante: infatti solo lungo queste linee possono svolgersi le traiettorie degli ioni che, uscendo da tale volume, si dirigono verso le armature; al di fuori di questa regione non esiste carica spaziale e pertanto la distribuzione delle superficie equipotenziali tende ad assumere, mano a mano che ci si allontana dalla sonda l'assetto che corrisponde alla distribuzione statica. Là dove l'azione della carica spaziale comincia ad essere sensibile le superficie equipotenziali si inflettono per potersi raccordare alle corrispondenti porzioni praticamente imperturbate al di fuori della regione soggetta all'azione della carica spaziale. Lo spostamento delle superficie equipotenziali, e quindi lo spostamento del punto di presa della sonda, dovranno

risultare dunque minori di quelli prevedibili in base alla considerazione della sonda lateralmente indefinita. Soltanto in prossimità di ciascuna armatura lo strato indefinito e la sonda reale vengono a dare risultati coincidenti, perché assumono ambedue il potenziale della armatura con la quale sono a contatto.

Roma — Istituto Nazionale di Geofisica — febbraio. 1948.

RIASSUNTO

Si studia l'influenza della carica spaziale sul potenziale misurato da una sonda radioattiva lateralmente indefinita e si confrontano i risultati ottenuti con quelli sperimentali relativi ad una sonda reale.