

PUBBLICAZIONI
DELL'ISTITUTO NAZIONALE DI GEOFISICA

N. 216

RENATO CIALDEA

La distribuzione spettrale
della polarizzazione della luce del cielo

ROMA

Estratto da *Annali di Geofisica*

Vol. III, n. 3, 1950

STAMPATO DALL'ISTITUTO GRAFICO TIBERINO (ROMA, VIA GAETA 14)

LA DISTRIBUZIONE SPETTRALE DELLA POLARIZZAZIONE DELLA LUCE DEL CIELO

RENATO CIALDEA

L'intensità, la composizione spettrale e lo stato di polarizzazione della luce diffusa dalle molecole e dalle particelle sospese nell'atmosfera, dipendono sia dal numero sia dalla natura di questi centri di diffusione. Infatti, finché si tratta delle molecole dei gas presenti nell'atmosfera, la luce diffusa presenta un grado di polarizzazione molto elevato ed il cielo ci appare azzurro: quando si tratta invece di centri di diffusione di dimensioni più grandi, la luce diffusa aumenta di intensità, il suo grado di polarizzazione diminuisce ed il cielo tende a imbiancarsi: quando si tratta poi di grossi centri di diffusione, quali per es. le goccioline di una nube, la luce diffusa è molto intensa, non è polarizzata e la nube ci appare bianca. Lo stato di polarizzazione inoltre può essere diverso per le varie lunghezze d'onda. Osservazioni eseguite da vari autori su questo argomento ⁽¹⁾, hanno dato dei risultati molto interessanti. Nella fig. 1 sono riportati, a titolo dimostrativo, alcuni diagrammi tolti dalle osservazioni del Kalitin ⁽²⁾; in ascisse si hanno le lunghezze d'onda ed in ordinate i valori di p , grado di polarizzazione in per cento; le osservazioni si riferiscono alla direzione normale ai raggi del sole. Si nota che l'andamento di p con λ è molto diverso da curva a curva: ometto la minuziosa classificazione (13 tipi) delle curve fatta dal Kalitin: faccio osservare solamente che un esame superficiale delle curve, fa distinguere quattro andamenti diversi:

- 1) p è indipendente da λ (tipo N. 1) curva A
- 2) p è crescente con λ (tipo N. 2) curva D
- 3) p è decrescente con λ (tipo N. 3) curva B
- 4) p presenta uno o più massimi o minimi (tipi N. 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12) curve C, E, G .

Definirò normale l'andamento presentato dalla polarizzazione nei primi tre tipi, che possono riunirsi tutti in una unica categoria, e anormale quello presentato nell'ultimo tipo.

La teoria classica della polarizzazione della luce del cielo di So-

ret ⁽³⁾ e di Hurion ⁽⁴⁾ rielaborata e completata da Carrelli ⁽⁵⁾, studia la variazione di p con la direzione della zona del cielo osservata e quindi la posizione dei punti neutri, tenendo conto della diffusione

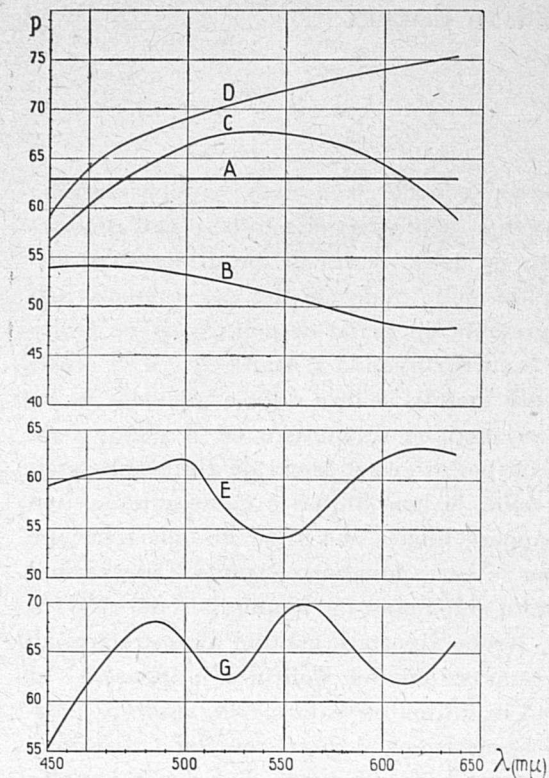


Fig. 1

spettroale del grado di polarizzazione nel caso di centri grossi di diffusione. Invece nel caso della diffusione molecolare, l'andamento di p con la lunghezza d'onda fu studiato teoricamente da Tichanowsky ⁽⁶⁾, che riprese la teoria di Cabannes applicando alle molecole d'aria (Luftmoleküle) il concetto di anisotropia molecolare. Fu trovata così, tenendo conto della diffusione secondaria, la seguente formula valida per le visuali normali alla direzione di propagazione dei raggi solari

$$p = \frac{(6 - 13a + 7a^2) + (1,725 - 3,449a + 1,725a^2) 1,913 \cdot 10^{-18} \lambda^{-4}}{(6 - a - 7a^2) + (3,105 + 7,179a + 0,161a^2) 1,913 \cdot 10^{-18} \lambda^{-4}} \quad [1]$$

dove λ è la lunghezza d'onda espressa in cm, ed a il coefficiente di anisotropia molecolare. Il valore di tale coefficiente, tratto da ricerche

secondaria; i vari parametri che in questa teoria denotano le proprietà diffondenti dell'atmosfera, sono ovviamente delle funzioni della lunghezza d'onda.

Infatti, la diffusione secondaria prende in considerazione anche la luce rinviata dalle particelle in sospensione nell'atmosfera; quindi le caratteristiche di questa luce, che dipendono sia dalla grandezza che dalla qualità delle particelle stesse, fanno variare la composizione spettrale e quindi il grado di polarizzazione della luce del cielo.

Nella letteratura non esistono, per quanto mi risulta, elementi teorici circa la distribuzione

di Cabannes ed altri, era posto uguale a 0,044: con questo valore la [1] diventa

$$p = \frac{5,442 + 3,015 \cdot 10^{-18} \lambda^{-4}}{5,942 + 6,545 \cdot 10^{-18} \lambda^{-4}} \quad [2]$$

che si trova in buon accordo con alcune misure da lui eseguite con cielo sereno e per tre lunghezze d'onda diverse ($\lambda = 0,436 - 0,539 - 0,679 \mu$).

Il confronto fra le curve sperimentali del Kalitin e quella teorica di Tichanowsky risulta dal diagramma di fig. 2: in ascisse è stata riportata la lunghezza d'onda in scala λ^{-4} ed in ordinate l'inverso della depolarizzazione ρ definita da $\rho = (1 - p)/(1 + p)$. La curva *T*

ricavata dalla formula teorica [2] di Tichanowsky ha un andamento concorde solo con uno dei tipi classificati. Inoltre poiché in tale teoria si suppone che esistano solo le molecole come centri di diffusione, il valore di p che risulta dalla [2] è ovviamente molto elevato, mentre le curve sperimentali si riferiscono a valori più bassi di p . Si potrebbe pensare che la presenza di centri di diffusione più grandi possa essere rappresentata con un aumento fittizio dell'anisotropia molecolare: ma l'introduzione nella [1] di un coefficiente di anisotropia più forte non varrebbe, come può agevolmente verificarsi, a giustificare la divergenza tra gli andamenti teorici e quelli sperimentali.

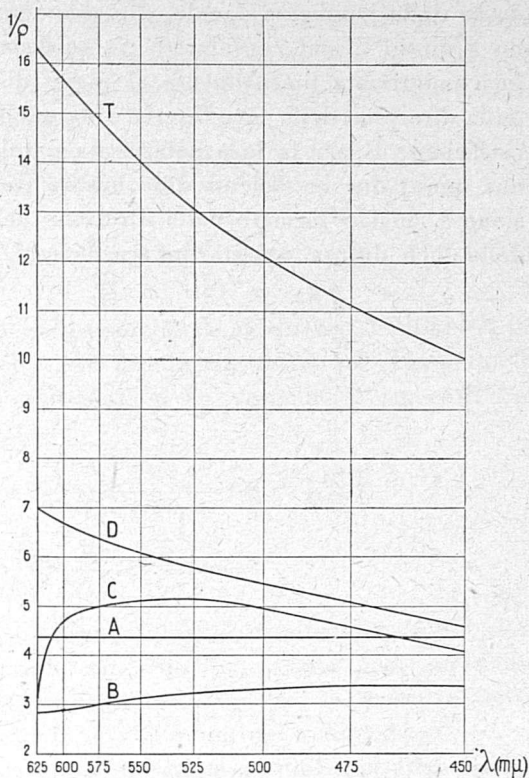


Fig. 2

Nella presente nota studierò teoricamente la distribuzione spet-

trale della polarizzazione della luce del cielo, prendendo in considerazione non solo la diffusione molecolare, ma anche quella derivante dalla presenza di particelle grosse. Si vedrà poi che le formule da me elaborate sono in buon accordo con gli andamenti sperimentali rilevati dal Kalitin.

Farò anzitutto delle ipotesi semplificative di prima approssimazione; supporrò cioè che la diffusione avvenga per opera di due tipi distinti di diffusori. I primi, costituiti da molecole isotrope, che diffondono la luce secondo la legge di Lord Rayleigh, con l'inversa proporzionalità alla quarta potenza della lunghezza d'onda e che chiamerò per brevità diffusori molecolari; gli altri invece costituiti da particelle grosse che presentano un coefficiente di diffusione indipendente dalla lunghezza d'onda, che chiamerò diffusori bianchi. Riguardo a questi ultimi considererò un coefficiente di diffusione r per la luce polarizzata normalmente al piano di diffusione, piano definito dalla direzione della luce diretta e da quella della luce diffusa, ed un coefficiente R per la luce polarizzata parallelamente al suddetto piano: questi due coefficienti sono inoltre funzioni dell'angolo di diffusione ϑ , angolo formato dalla direzione della luce diretta con quella della luce diffusa. Questi due coefficienti, benché vengano chiamati

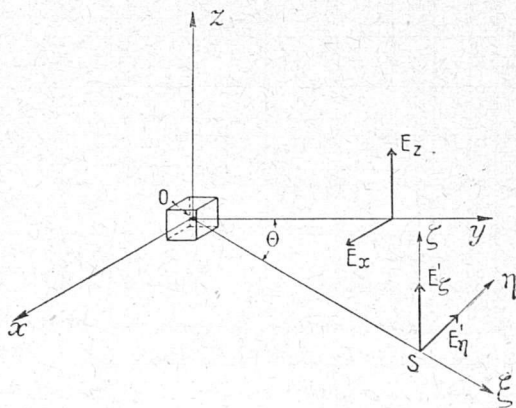


Fig. 3

coefficienti di diffusione, ci rappresentano la generica distribuzione dell'energia luminosa rinviata da un diffusore bianco, per diffrazione, riflessione, diffusione, considerando anche le eventuali rifrazioni e riflessioni interne, qualora si tratti di gocce grosse.

Incomincerò a calcolare anzitutto l'intensità e lo stato di polarizzazione della luce diffusa da un volumetto elementare dV isolato, pieno di diffusori molecolari e di diffusori bianchi.

Il volumetto elementare sia posto all'origine delle coordinate (fig. 3): la luce naturale diretta si propaghi lungo l'asse delle y nel verso negativo, con una intensità J_0 ; essa si può scomporre in due componenti incoerenti, di uguale intensità, polarizzate rettilineamen-

te, una nel piano xy e l'altra nel piano yz : nella figura sono riportati i due vettori E_x ed E_z che rappresentano l'ampiezza del campo elettrico di queste due componenti. Per studiare la luce diffusa per es. nella direzione OS , nel piano xy , si stabilisce una terna nel punto S , con l'asse ξ coincidente con la direzione OS , con l'asse η normale a questa direzione e giacente nel piano xy e con l'asse ζ ad essi normale. Consideriamo l'intensità della luce diffusa nella direzione OS nelle sue componenti dJ_ζ e dJ_η separatamente per i due tipi di diffusori. Nelle figg. 3 e 5 sono riportati i vettori E_x e E_z delle componenti della luce diretta e gli analoghi E'_η e E'_ζ delle componenti della luce diffusa come aventi la stessa ampiezza; è ovvio che in realtà questi ultimi sono molto più piccoli dei primi, ma, data l'impossibilità di mantenere nel disegno le reali proporzioni, essi si devono ritenere come solo indicativi per la loro direzione. Per quanto riguarda i diffusori bianchi, distribuiti con una concentrazione α nel volumetto dV , si hanno le rispettive intensità

$$(dJ_\eta)_b = \frac{1}{OS^2} r(\vartheta) \frac{J_o}{2} \alpha dV$$

$$(dJ_\zeta)_b = \frac{1}{OS^2} R(\vartheta) \frac{J_o}{2} \alpha dV$$

in quanto esse possono porsi proporzionali al numero di diffusori presenti ed alla intensità della luce diretta che incide sul volumetto. Riguardo poi ai diffusori molecolari si ha, secondo la legge di Lord Rayleigh,

$$(dJ_\eta)_m = \frac{1}{OS^2} \frac{\beta k}{\lambda^4} \frac{J_o}{2} \cos^2 \vartheta dV$$

$$(dJ_\zeta)_m = \frac{1}{OS^2} \frac{\beta k}{\lambda^4} \frac{J_o}{2} dV$$

dove k è la nota costante di proporzionalità che tiene conto del mezzo diffondente e β è un coefficiente che tiene conto della circostanza che le molecole d'aria effettivamente diffondenti, in presenza dei diffusori bianchi, occupano solo una aliquota del volumetto dV .

Le due componenti della luce diffusa sono perciò date da

$$dJ_\eta = (dJ_\eta)_b + (dJ_\eta)_m = \frac{1}{OS^2} [\alpha r(\vartheta) + \beta k \lambda^{-4} \cos^2 \vartheta] \frac{J_o}{2} dV \quad [3]$$

$$dJ_\zeta = (dJ_\zeta)_b + (dJ_\zeta)_m = \frac{1}{OS^2} [\alpha R(\vartheta) + \beta k \lambda^{-4}] \frac{J_o}{2} dV$$

Da qui si ottengono le espressioni per la intensità totale dJ e per la depolarizzazione ρ

$$dJ = dJ_{\xi} + dJ_{\eta} = \frac{1}{OS^2} \left\{ \alpha [R(\vartheta) + r(\vartheta)] + \beta k \lambda^{-4} [1 + \cos^2 \vartheta] \right\} \frac{J_0}{2} dV \quad [4]$$

$$\rho(\vartheta) = \frac{dJ_{\eta}}{dJ_{\xi}} = \frac{r(\vartheta)}{R(\vartheta)} \frac{1 + \frac{\beta k}{\alpha r(\vartheta)} \cos^2 \vartheta \lambda^{-4}}{1 + \frac{\beta k}{\alpha R(\vartheta)} \lambda^{-4}} \quad [5]$$

Interessante è il valore di ρ per la direzione normale ai raggi solari, valore che si ottiene ponendo nella [5] $\vartheta = \pi/2$

$$\rho(\pi/2) = \frac{r(\pi/2)}{R(\pi/2)} \frac{1}{1 + \frac{\beta k}{\alpha R(\pi/2)} \lambda^{-4}} \quad [6]$$

Se si riporta quest'ultima formula in un diagramma $\rho^{-1} - \lambda^{-4}$ (fig.

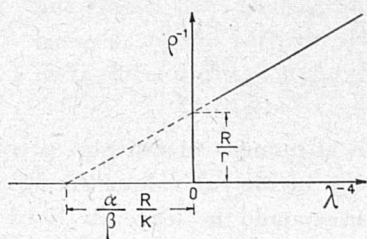


Fig. 4

4) si ottiene una retta che taglia l'asse delle ρ^{-1} nel punto di ordinata $R(\pi/2)/r(\pi/2)$ e l'asse λ^{-4} nel punto di ascissa $-\alpha R(\pi/2)/\beta k$.

Dalla formula [6] si vede che la depolarizzazione può essere diversa da zero (normalmente alla direzione della luce diretta) anche se non si considera la diffusione secondaria.

Prima di passare allo studio della diffusione secondaria, sarà utile valutare l'ordine di grandezza delle quantità che figurano nelle [4] e [5].

Si supponga anzitutto una atmosfera omogenea con diffusori uniformemente distribuiti ed uniformemente illuminati dal sole, ciò che equivale a trascurare l'assorbimento della radiazione da parte dell'atmosfera stessa. Ciascun volumetto dV allora ha una intensità data da

$$dI = \mu dV$$

indicando con μ l'intensità della luce diffusa per unità di volume.

Si calcoli ora il flusso di luce che arriva normalmente sulla terra entro un angolo solido elementare $d\Omega$; si consideri un generico volumetto all'altezza h limitato dal cono $d\Omega$ e dalle due superfici elementari tagliate dal cono stesso su due piani orizzontali posti a di-

stanza dh ; ciascun dV ha perciò un volume $dV = d\sigma dh = h^2 d\Omega dh$ ed una intensità

$$dI = \mu h^2 d\Omega dh$$

e quindi produce sulla terra una illuminazione

$$dJ = \mu d\Omega dh \quad [7]$$

L'illuminazione prodotta da tutta l'atmosfera, indicando con H l'altezza dell'atmosfera omogenea, è allora

$$dJ = \int_0^H \mu d\Omega dh = \mu H d\Omega .$$

Questa illuminazione equivale ovviamente a quella prodotta da una sorgente che abbia la brillantezza μH .

Ora la brillantezza del cielo terso in direzione normale ai raggi del sole, è stata misurata varie volte ed è nota; qui si assume un valore medio (7) di 0,09 candele/cm²: l'altezza dell'atmosfera omogenea è di circa $8 \cdot 10^5$ cm; così si ottiene

$$\mu = 1,13 \cdot 10^{-7} \quad \text{candele/cm}^3$$

In questo caso si hanno solo i diffusori molecolari e quindi, ponendo nella [4] $\alpha=0$, $\beta=1$, $\vartheta=\pi/2$,

$$k\lambda^{-4} \frac{J_0}{2} = 1,13 \cdot 10^{-7} ;$$

ora per l'illuminazione prodotta dal sole, si può assumere un valore medio di 11,5 candele/cm² e quindi

$$k\lambda^{-4} = 2 \cdot 10^{-8} \quad [8]$$

Riguardo alle altre grandezze (α , r , R) è chiaro che non si potrà avere un valore esatto di esse, giacché le brillanze del cielo velato sono molto diverse secondo la grandezza e la concentrazione dei diffusori bianchi e secondo lo spessore dello strato da loro formato. Però si può fare un analogo ragionamento, purché al posto di H , si introduca, nell'integrazione della [7], un altro spessore h^* , lo spessore cioè equivalente dello strato dei diffusori bianchi; esso si può definire come lo spessore che dovrebbe avere uno strato ipotetico composto di diffusori dello stesso tipo di quelli dello strato reale, uniformemente illuminato dal sole (da notarsi che in questo caso non si potrebbe più trascurare l'assorbimento della luce), che producesse la stessa illuminazione sulla terra. Ora nulla si può dire sullo spessore di questo strato, ma certamente è possibile fissare un limite superiore, considerando concentrazioni fortissime di diffusori bianchi; è noto infatti

che la visibilità nelle nuvole o nella nebbia spessa è dell'ordine di $5 \cdot 10^2$ cm e che inoltre la brillantezza di una nube illuminata in pieno dal sole è dell'ordine di 2 candele/cm²; si può supporre perciò:

$$e^* < 2 \text{ candele/cm}^2 \quad \text{e} \quad h^* > 5 \cdot 10^2 \text{ cm, e quindi}$$

$$\mu^* = \frac{e^*}{h^*} < 4 \cdot 10^{-3} \quad \text{candele/cm}^3 \quad [9]$$

e ponendo per semplicità $r \simeq R$ si ha dalla [4]

$$\alpha r \simeq \alpha R = \frac{\mu^*}{J_0} < 4 \cdot 10^{-4}, \quad [10]$$

trascurando del tutto il termine dovuto alla diffusione molecolare.

Per poter prendere in considerazione la diffusione secondaria, occorre anzitutto calcolare l'intensità che arriva, da parte di tutta l'atmosfera, sull'elementino di volume dV .

L'azione di tutta l'atmosfera si potrebbe supporre, seguendo l'idea di Soret, come dovuta a diffusori concentrati su una sfera di raggio unitario, il cui centro si trova nel volumetto considerato, ammettendo che tutte le particelle diffondenti, che si trovano in una data direzione, possano essere sostituite con una sola particella posta sulla sfera di raggio unitario, tale che la sua azione sul volumetto dV sia uguale alla risultante delle azioni di tutte le particelle che si trovano realmente in quella direzione. Io supporrò invece che tutti i diffusori siano distribuiti uniformemente in uno strato sferico. Quindi, per ciascuna direzione considero un piccolo angolo solido $d\Omega$ centro in O ; si è già visto che tutti i diffusori, uniformemente distribuiti in tale direzione ed uniformemente illuminati, producono in O una illuminazione che si ricava dalla [7]

$$dJ = \mu h^* d\Omega \quad [11]$$

dove h^* è lo spessore di questo strato sferico: si deve osservare che

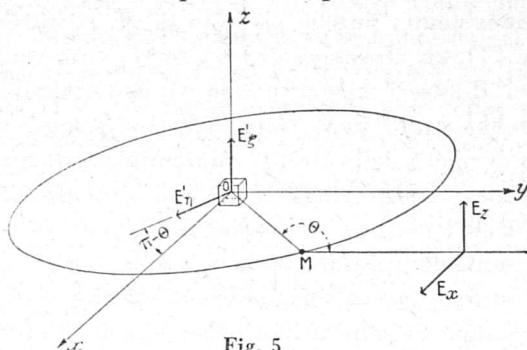


Fig. 5

esso è puramente fittizio e rappresenta lo spessore che dovrebbe avere quel dato strato sferico, perché la sua azione sul dV fosse uguale a quella prodotta dallo strato reale. Si consideri una superficie sferica di raggio unitario con centro in O ; sia

$d\sigma$ la superficie elementare tagliata dal $d\Omega$ su questa sfera e sia M il centro di $d\sigma$ (fig. 5); M sia inoltre nel piano xy . Allora in O arriverà la luce diffusa nella direzione \overline{MO} e produrrà una illuminazione data dalla [11], che, dopo avervi sostituito le [3], diventa

$$dJ'_{\eta} = [\alpha r(\vartheta) + \beta k\lambda^{-4} \cos^2 \vartheta] \frac{J_0}{2} h^* d\sigma$$

$$dJ'_{\zeta} = [\alpha R(\vartheta) + \beta k\lambda^{-4}] \frac{J_0}{2} h^* d\sigma$$

quindi si avranno le tre componenti sugli assi x, y, z

$$dJ'_x = dJ'_{\eta} \cos^2(\pi - \vartheta) = [\alpha r(\vartheta) + \beta k\lambda^{-4} \cos^2 \vartheta] \cos^2 \vartheta \frac{J_0}{2} h^* d\sigma$$

$$dJ'_y = dJ'_{\eta} \sin^2(\pi - \vartheta) = [\alpha r(\vartheta) + \beta k\lambda^{-4} \cos^2 \vartheta] \sin^2 \vartheta \frac{J_0}{2} h^* d\sigma$$

$$dJ'_z = dJ'_{\zeta} = [\alpha R(\vartheta) + \beta k\lambda^{-4}] \frac{J_0}{2} h^* d\sigma$$

Si decomponga ora la superficie sferica in n fusi aventi la direzione y come diametro comune; l'area dell'elementino di superficie che contiene il punto M si può porre uguale a $(2\pi/n) \sin \vartheta d\vartheta$, e se n è abbastanza grande e $d\vartheta$ abbastanza piccolo, si può supporre che l'azione in O della detta superficie elementare, sia uguale per tutti i diffusori che si trovano in quella direzione.

Quindi le tre componenti della luce diffusa in O da questo elementino di superficie $d\sigma$ produrranno in O le tre illuminazioni

$$dJ'_x = \frac{\pi}{n} \alpha r(\vartheta) \cos^2 \vartheta \sin \vartheta J_0 h^* d\vartheta + \frac{\pi}{n} \beta k\lambda^{-4} \cos^4 \vartheta \sin \vartheta J_0 h^* d\vartheta$$

$$dJ'_y = \frac{\pi}{n} \alpha r(\vartheta) \sin^3 \vartheta J_0 h^* d\vartheta + \frac{\pi}{n} \beta k\lambda^{-4} \cos^2 \vartheta \sin^2 \vartheta J_0 h^* d\vartheta$$

$$dJ'_z = \frac{\pi}{n} \alpha R(\vartheta) \sin \vartheta J_0 h^* d\vartheta + \frac{\pi}{n} \beta k\lambda^{-4} \sin \vartheta J_0 h^* d\vartheta$$

Per trovare l'azione di ciascun fuso si può integrare per ϑ variabile da 0 a π , ottenendo

$$J'_x = \frac{1}{n} \alpha J_o h^* \int_0^\pi \pi r(\vartheta) \cos^2 \vartheta \sin \vartheta d\vartheta + \frac{\pi}{n} \beta k \lambda^{-4} J_o h^* \int_0^\pi \cos^4 \vartheta \sin \vartheta d\vartheta$$

$$J'_y = \frac{1}{n} \alpha J_o h^* \int_0^\pi \pi r(\vartheta) \sin^3 \vartheta d\vartheta + \frac{\pi}{n} \beta k \lambda^{-4} J_o h^* \int_0^\pi \cos^2 \vartheta \sin^3 \vartheta d\vartheta$$

$$J'_z = \frac{1}{n} \alpha J_o h^* \int_0^\pi \pi R(\vartheta) \sin \vartheta d\vartheta + \frac{\pi}{n} \beta k \lambda^{-4} J_o h^* \int_0^\pi \sin \vartheta d\vartheta$$

eseguita l'integrazione si ha

$$J'_x = \frac{1}{n} \alpha J_o h^* F_1 + \frac{2}{5} \frac{\pi}{n} \beta k \lambda^{-4} J_o h^*$$

$$J'_y = \frac{1}{n} \alpha J_o h^* F_2 + \frac{4}{15} \frac{\pi}{n} \beta k \lambda^{-4} J_o h^*$$

$$J'_z = \frac{1}{n} \alpha J_o h^* F_3 + 2 \frac{\pi}{n} \beta k \lambda^{-4} J_o h^* ,$$

indicando con F_1 , F_2 , ed F_3 i tre integrali che contengono la $r(\vartheta)$ e la $R(\vartheta)$. Se si passa ad un altro fuso con una rotazione intorno all'asse y si avranno analogamente tre componenti delle quali una rimarrà sempre parallela all'asse y , e per questa si ha ovviamente come azione di tutti gli n fusi,

$$J_y = n J'_y = \alpha J_o h^* F_2 + \frac{4}{15} \pi \beta k \lambda^{-4} J_o h^* .$$

Le altre due componenti muteranno al variare del fuso considerato ma, data la simmetria sferica, l'effetto risultante di tutta la sfera equivale ad un raggio di luce naturale diretto secondo y che produce una illuminazione di componenti

$$J_x = n \frac{J'_x + J'_z}{2}$$

$$J_z = n \frac{J'_x + J'_z}{2} ;$$

quindi in O si ha per la luce diffusa da tutta la sfera

$$\begin{aligned}
 J_x &= \alpha \frac{F_1 + F_3}{2} J_o h^* + \frac{6}{5} \pi \beta k \lambda^{-4} J_o h^* \\
 J_y &= \alpha F_2 J_o h^* + \frac{4}{15} \pi \beta k \lambda^{-4} J_o h^* \\
 J_z &= \alpha \frac{F_1 + F_3}{2} J_o h^* + \frac{6}{5} \pi \beta k \lambda^{-4} J_o h^* .
 \end{aligned}$$

Ma in O arriva anche la luce diretta del sole: perciò si hanno in totale le tre componenti

$$\begin{aligned}
 J_x &= \frac{J_o}{2} \left\{ 1 + \alpha (F_1 + F_3) h^* + \frac{12}{5} \pi \beta k \lambda^{-4} h^* \right\} \\
 J_y &= \frac{J_o}{2} \left\{ 2 \alpha F_2 h^* + \frac{8}{15} \pi \beta k \lambda^{-4} h^* \right\} \quad [12] \\
 J_z &= \frac{J_o}{2} \left\{ 1 + \alpha (F_1 + F_3) h^* + \frac{12}{5} \pi \beta k \lambda^{-4} h^* \right\} .
 \end{aligned}$$

Si deve ora osservare che sia nella J_x che nella J_z ci sono tre termini; il primo rappresenta l'illuminazione prodotta direttamente dal sole, il secondo quella prodotta dai diffusori bianchi ed il terzo quella prodotta dai diffusori molecolari; ma si è visto dalle [8] e [10] che il terzo termine si può trascurare rispetto al primo, mentre il secondo non è sempre trascurabile.

Quindi le tre componenti possono essere date, con buona approssimazione, da

$$\begin{aligned}
 J_x &= \frac{J_o}{2} \left\{ 1 + \alpha (F_1 + F_3) h^* \right\} \\
 J_y &= \frac{J_o}{2} \left\{ 2 \alpha F_2 + \frac{8}{15} \pi \beta k \lambda^{-4} \right\} h^* \quad [13] \\
 J_z &= \frac{J_o}{2} \left\{ 1 + \alpha (F_1 + F_3) h^* \right\} .
 \end{aligned}$$

Per determinare la luce diffusa da un volumetto elementare dV , posto in O , basta applicare le formole [3], dalle quali si ottiene, per una direzione OS , che forma un angolo ϑ con l'asse delle y (S si suppone come al solito nel piano xy)

$$dJ_\zeta = \frac{1}{OS^2} [\alpha R(\vartheta) + \beta k \lambda^{-4}] J_z dV \quad [14]$$

$$dJ_{\eta} = \frac{1}{OS^2} \left[\alpha r(\vartheta) + \beta k \lambda^{-4} \cos^2 \vartheta \right] J_x dV + \quad [14]$$

$$+ \frac{1}{OS^2} \left[\alpha r(\pi/2 - \vartheta) + \beta k \lambda^{-4} \cos^2(\pi/2 - \vartheta) \right] J_y dV$$

e se si sostituiscono i valori J_x , J_y e J_z delle [13] nelle [14] e si trascurano i termini in $k^2 \lambda^{-8}$, si hanno delle espressioni di dJ_{ζ} e dJ_{η} , dalle quali si ottiene la depolarizzazione $\varrho(\vartheta)$. Ma a noi interessa in modo particolare il valore di ϱ per le visuali normali ai raggi del sole, cioè, ponendo $\vartheta = \pi/2$ e $2F = F_1 + F_3$, ed indicando con l'indice n le grandezze che si riferiscono a $\vartheta = \pi/2$ e con l'indice 0 quelle che si riferiscono a $\vartheta = 0$.

$$\varrho_n = \left(\frac{dJ_{\eta}}{dJ_{\zeta}} \right)_{\vartheta = \pi/2} = \frac{r_n}{R_n} \frac{1 + \frac{r_o}{r_n} \frac{2\alpha F_2 h^*}{1 + 2\alpha F h^*} + h^* \frac{2\alpha F_2 + \frac{8}{15} \pi \alpha r_o}{1 + 2\alpha F h^*} \frac{\beta k}{\alpha r_n} \lambda^{-4}}{1 + \frac{\beta k}{\alpha R_n} \lambda^{-4}} \quad [15]$$

Se si riporta questa relazione nel solito piano $\varrho^{-1} - \lambda^{-4}$ si ha una curva del tipo

$$\frac{1}{\varrho} = A \frac{1 + B \lambda^{-4}}{C + D \lambda^{-4}}$$

Tale curva taglia l'asse delle ϱ^{-1} nel punto di ordinata $\varrho^{-1} = A/C$ ed ha un andamento monotono crescente, costante o decrescente con λ^{-4} a seconda del valore della sua derivata

$$\frac{d(\varrho^{-1})}{d(\lambda^{-4})} = A \frac{CB - D}{(C + D \lambda^{-4})^2}$$

a seconda cioè che sia, essendo $A > 0$, $CB \geq D$

$$\frac{1}{R_n} \left[1 + \frac{r_o}{r_n} \frac{2\alpha F_2 h^*}{1 + 2\alpha F h^*} \right] \geq \frac{1}{r_n} \left[\frac{2\alpha F_2 + \frac{8}{15} \pi \alpha r_o}{1 + 2\alpha F h^*} h^* \right] \quad [16]$$

od anche,

$$\alpha h^* \left[2F_2 \frac{R_n}{r_n} + \frac{8}{15} \pi \frac{r_o}{r_n} R_n - 2\Gamma - 2F_2 \frac{r_o}{r_n} \right] \leq 1$$

cioè

$$\alpha h^* \cdot f(r, R) \leq 1 \quad [17]$$

Questa ultima espressione mostra che, comunque fissato il tipo di particelle di uno strato, cioè fissata la $r(\vartheta)$ e la $R(\vartheta)$, e la loro concentrazione, tale strato può dar luogo ad una distribuzione spettrale del grado di polarizzazione in direzione normale ai raggi del sole, che può essere decrescente con λ per strati sottili, cioè per h^* piccoli, può rimanere costante per un certo valore di h^* , cioè per quel valore che soddisfa la [17] con il segno di uguaglianza e può essere crescente per strati spessi, cioè per h^* grandi.

Infine si possono fare le seguenti osservazioni riguardo al tipo di funzione della Q :

1) per spessori h^* molto piccoli e prossimi a zero, la [15] diventa

$$Q_n = \frac{r_n}{R_n} \frac{1}{1 + \frac{\beta k}{\alpha R_n} \lambda^{-4}}$$

se si riporta nel solito piano $Q^{-1} - \lambda^{-4}$, ha una retta, crescente con λ^{-4} , analogamente a quello che si aveva nel caso di un volumetto isolato: in questo caso quindi la diffusione secondaria può essere trascurata;

2) per spessori h^* molto elevati si ha invece

$$Q_n = \frac{r_n}{R_n} \left[1 + \frac{r_o}{r_n} \frac{F_2}{F} \right] \frac{1 + \frac{15 F_2 + 4 r_o}{15 [r_n F + r_o F_2]} \frac{\beta k}{\alpha r_n} \lambda^{-4}}{1 + \frac{\beta k}{\alpha R_n} \lambda^{-4}}$$

l'andamento della Q^{-1} risulta indipendente dallo spessore e viene rappresentato da un ramo di iperbole decrescente con λ^{-4} .

3) per valori intermedi di h^* , si hanno ovviamente rami di iperbole compresi tra questi due estremi.

La formula [15], che è stata così trovata è in buon accordo con l'andamento delle osservazioni relativamente alla distribuzione normale del grado di polarizzazione (curve *A*, *B*, *C* di figg. 1 e 2).

L'ipotesi da me posta sull'esistenza dei diffusori bianchi, può essere inoltre rimossa, supponendo che esistano diffusori che presentino due coefficienti di diffusione r e R , che siano funzioni non solo di ϑ , ma anche di λ . Allora la derivata di Q^{-1} rispetto a λ^{-4} è una funzione di λ e quindi comunque fissato il tipo di diffusori, la loro concentrazione e lo spessore del relativo strato, si possono trovare uno o più valori di λ per i quali si abbia l'annullamento della detta derivata

e quindi la depolarizzazione potrà presentare uno o più massimi o minimi (curve *D*, *E*, *F* di figg. 1 e 2).

L'andamento di ρ si complica poi ancora di più, se si considera la sovrapposizione di strati di diffusori di diversi tipi.

Le considerazioni teoriche da me svolte mostrano dunque che la distribuzione spettrale della polarizzazione della luce del cielo è dovuta essenzialmente all'azione simultanea dei diffusori molecolari e dei diffusori grossi, e viene notevolmente influenzata dal valore dello spessore dello strato diffondente.

Roma — Istituto Nazionale di Geofisica — Aprile 1950.

RIASSUNTO

Si studia la distribuzione spettrale della polarizzazione della luce diffusa dal cielo, tenendo conto sia dell'azione delle molecole diffondenti, sia dell'azione di grossi centri di diffusione. Si mostra così che la depolarizzazione ha un andamento monotono crescente, costante, o decrescente con la lunghezza d'onda λ , a seconda dello spessore dello strato diffondente.

BIBLIOGRAFIA

- (1) PERNTNER-EXNER: *Meteorologische Optik*. Wien 1922.
- (2) N. N. KALITIN, *Meteor. Zeit.* XLII, 132, 1926.
- (3) J. L. SORET: *Ann. de Chim. et de Phys.* 14, 503, 1888.
- (4) A. HURION: *Ann. de Chim. et de Phys.* 7, 456, 1896.
- (5) A. CARRELLI: *Rendiconti Acc. Lincei*. I, 493, 907, 1012, 1242, 1946.
- (6) J. J. TICHANOWSKY: *Physikal. Zeit.* 28, 252, 680, 1927.
- (7) J. CABANNES: *La diffusion moléculaire de la lumière*. Paris 1929, p. 172.