Sulla teoria delle maree atmosferiche gravitazionali

F. MARIANI

Introduzione.

Negli ultimi anni notevoli progressi sono stati fatti nello studio delle maree atmosferiche. L'interesse teorico di tali ricerche è aumentato per la necessità di meglio inquadrare l'importanza e le caratteristiche dei movimenti di marea nell'alta atmosfera. La teoria classica delle maree di Laplace, da questi formulata per il caso di mari, sotto opportune ipotesi, «a posteriori» convalidate dall'esperienza, può essere estesa anche al caso delle maree atmosferiche (1) (2) (3). Tuttavia in quest'ultimo caso, estendendosi l'effetto fino a quote molto alte, talune delle ipotesi di Laplace non possono più considerarsi senz'altro accettabili: ci riferiamo precisamente alla variazione con la quota z rispetto al suolo del raggio vettore $a = R + z$ e della accelerazione di gravità $g(z) = G \dfrac{R^2}{(R+z)^2}$, avendo indicato con R il raggio della terra e con G il valore di g al suolo. In effetti, all'altezza di 100 km, i valori di $R + z$ e di $g(z)$ risultano rispettivamente maggiore di circa 1,5% e minore di circa 3% rispetto a R e a G. Poichè le maree atmosferiche insorgono per un fenomeno di risonanza, non si può escludere a priori che l'introduzione nella teoria della variabilità del raggio vettore e della accelerazione di gravità con la quota, porti a qualche sensibile differenza rispetto al caso che si suppongano costanti. Nella presente ricerca si estende appunto la teoria delle maree gravitazionali al caso in cui si tenga conto della effettiva variabilità con la quota del raggio vettore e della accelerazione di gravità.

Paragrafo 1. Gli sviluppi matematici della teoria.

Lista dei simboli usati:

R = raggio della Terra.
ω = velocità angolare della Terra.
G = accelerazione di gravità al suolo.
z = quota rispetto al suolo.
$g = G\left(\dfrac{R}{R+z}\right)^2$ = accelerazione di gravità alla quota z.
γ = rapporto tra calori specifici a pressione e a volume costante.
ϑ = colatitudine.
Φ = longitudine.
$u = u(z, \vartheta, \Phi)$ = componente orizzontale della velocità dell'aria, nel senso Nord-Sud.
$v = v(z, \vartheta, \Phi)$ = componente orizzontale della velocità dell'aria, nel senso Ovest-Est.
$w = w(z, \vartheta, \Phi)$ = componente verticale della velocità dell'aria.

$$\chi = \chi(z, \vartheta, \Phi) = \frac{1}{(R+z)\operatorname{sen}\vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta}(u \operatorname{sen}\vartheta) + \frac{1}{(R+z)\operatorname{sen}\vartheta}\frac{\partial v}{\partial \Phi} + \frac{\partial w}{\partial z} + 2\frac{w}{R+z} = \tag{1}$$

= divergenza della velocità.

$\Omega = \Omega(z, \vartheta, \Phi)$ = potenziale delle forze di marea.
$\dfrac{2\pi}{\sigma}$ = periodo delle oscillazioni di marea.
$f = \sigma/2\omega$
p_o, ϱ_o, T_o — valori statici della pressione, della densità e della temperatura alla generica quota z.

p, ϱ, T — variazioni della pressione, della densità e della temperatura rispetto ai valori statici, prodotte dalle oscillazioni di marea.

$p_G, \varrho_G, T_G =$ valori di p_o, ϱ_o, T_o al suolo.

$H = \dfrac{k\,T_o}{mg}$ = scala delle altezze.

k = costante di Boltzmann.

m — massa media delle molecole d'aria.

Nella [1] sopra scritta si nota che l'espressione di χ differisce da quella del caso «classico», oltrechè per la sostituzione materiale di R con $R+z$, anche per la presenza del termine $2\dfrac{w}{R+z}$.

A partire dalle equazioni fondamentali della teoria delle maree gravitazionali [4] trascurando, nell'ambito di una teoria lineare, i prodotti e i quadrati delle componenti di velocità u, v, w, ove in più si ignori la ellitticità della Terra e si consideri trascurabile la componente verticale della accelerazione, le equazioni del moto diventano:

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial t} - 2\,\omega\, v \cos\vartheta = -\frac{1}{R+z}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\frac{p}{\varrho_o}+\Omega\right) \\ &\frac{\partial v}{\partial t} + 2\,\omega\, u\cos\vartheta = -\frac{1}{(R+z)\,\mathrm{sen}\,\vartheta}\frac{\partial}{\partial\Phi}\left(\frac{p}{\varrho_o}+\Omega\right)\end{aligned}\right. \qquad [2]$$

e

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -g\,\varrho - \varrho_o\frac{\partial\Omega}{\partial z} \qquad [3]$$

A tali equazioni vanno aggiunte l'equazione di continuità che, trascurando prodotti di u, v, w, ϱ, χ, si scrive

$$\frac{\partial\varrho}{\partial t} + \varrho_o\,\chi + w\frac{\partial\varrho_o}{\partial z} = o \qquad [4]$$

e l'equazione adiabatica di stato

$$\frac{\partial p}{\partial t} - wg\,\varrho_o + \gamma\, g\, H\,\varrho_o\,\chi = o \qquad [5]$$

Come d'uso, nelle suddette espressioni assumiamo un fattore temporale $e^{i\sigma t}$ per le variabili u, v, oltrechè, in ciò che seguirà, per w, p, ϱ, Ω.

Le espressioni che allora si deducono per u, v sono

$$u = \frac{\sigma}{4\,(R+z)\,\omega^2\,(f^2-\cos^2\vartheta)}\left[i\frac{\partial}{\partial\vartheta} + \frac{\mathrm{cotg}\,\vartheta}{f}\frac{\partial}{\partial\Phi}\right]\left(\frac{p}{\varrho_o}+\Omega\right) \qquad [6]$$

e, rispettivamente,

$$v = \frac{i\,\sigma}{4\,(R+z)\,\omega^2\,(f^2-\cos^2\vartheta)}\left[\frac{i\cos\vartheta}{f}\frac{\partial}{\partial\vartheta} + \frac{1}{\mathrm{sen}\,\vartheta}\frac{\partial}{\partial\Phi}\right]\left(\frac{p}{\varrho_o}+\Omega\right) \qquad [7]$$

Sostituendo le [6] e [7] nella [1], si ottiene la prima equazione fondamentale:

$$\chi - \frac{\partial w}{\partial z} - 2\frac{w}{R+z} = \frac{i\,\sigma}{4\,\omega^2\,(R+z)^2}\,F\left(\frac{p}{\varrho_o}+\Omega\right) \qquad [8]$$

ove con F si è indicato l'operatore differenziale

$$\frac{1}{\mathrm{sen}\,\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left[\frac{\mathrm{sen}\,\vartheta}{f^2-\cos^2\vartheta}\left(\frac{\partial}{\partial\vartheta} - i\frac{\mathrm{cotg}\,\vartheta}{f}\frac{\partial}{\partial\Phi}\right)\right] + \frac{1}{f^2-\cos^2\vartheta}\left[\frac{i\,\mathrm{cotg}\,\vartheta}{f}\frac{\partial^2}{\partial\vartheta\,\partial\Phi} + \frac{1}{\mathrm{sen}^2\,\vartheta}\frac{\partial^2}{\partial\Phi^2}\right]. \qquad [9]$$

Dalle equazioni sopra scritte infine, ricordando che $\dfrac{d\varrho}{dz} = -2\dfrac{g}{R+z}$ si deduce, con semplice sebbene laboriosa serie di passaggi, che per ragioni di spazio omettiamo, la seconda equazione fondamentale

$$\frac{\partial w}{\partial z} - \frac{2\,w}{R+z} = (1-\gamma)\,\chi + \gamma\, H\frac{\partial\chi}{\partial z} - \frac{i\sigma}{g}\frac{\partial\Omega}{\partial z}. \qquad [10]$$

Si nota che le equazioni [8] e [10] differiscono da quelle corrispondenti ottenute da Wilkes per la presenza in ambedue di un termine $-2\dfrac{w}{R+z}$ a primo membro, e di un denominatore $(R+z)^2$ anzichè R^2 nel secondo membro della [8]. Immediata conseguenza di queste differenze è l'impossibilità di eliminare la componente w delle velocità tra le due equazioni come è invece possibile nel caso di Wilkes. Tuttavia, essendo il termine in $R+z$ di tipo perturbativo, sarà ugualmente possibile, come si vedrà in seguito, ottenere una equazione nella sola variabile χ.

Differenziando e sommando le [8] e [10], si ottiene l'equazione

$$-\frac{4}{R+z}\frac{\partial w}{\partial z}+4\frac{w}{(R+z)^2}+\frac{\partial \chi}{\partial z}=(1-\gamma)\frac{\partial \chi}{\partial z}+\gamma\frac{\partial H}{\partial z}\frac{\partial \chi}{\partial z}+\gamma H\frac{\partial^2 \chi}{\partial z^2}+\frac{i\sigma}{g^2}\frac{\partial g}{\partial z}\frac{\partial \Omega}{\partial z}$$
$$-\frac{i\sigma}{g}\frac{\partial^2 \Omega}{\partial z^2}+\frac{i\sigma}{4\omega^2(R+z)^2}F\left[\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{p}{\varrho_o}+\Omega\right)\right]-\frac{i\sigma}{2\omega^2(R+z)^3}F\left(\frac{p}{\varrho_o}+\Omega\right). \qquad [11]$$

Se nella [11] si mantengono i termini di I ordine in $\dfrac{1}{R+z}$, trascurando quelli di ordine superiore [nei termini a secondo membro il prodotto $\omega^2(R+z)^2$ essendo ω dell'ordine di $\dfrac{1}{R}$ risulta con buona approssimazione di ordine zero rispetto a $\left.\dfrac{1}{R+z}\right|$, e se si tiene conto del fatto che le quantità $(R+z)^2$, $g(z)$, $\dfrac{dg}{dz}$ variano assai lentamente con z e per valori di z fino a $200 \div 300$ km, ponendo $\tau=\dfrac{1}{R}$ e conservando i soli termini di primo ordine in τ, possono essere usate con sufficiente approssimazione le seguenti espressioni semplificate:

$$\begin{cases} (R+z)^2 \cong R^2(1+2\tau z) \\ g(z)=G\dfrac{R^2}{(R+z)^2}\cong G(1-2\tau z) \\ \dfrac{dg}{dz}=-2\dfrac{g}{R+z}\cong -2G\tau . \end{cases} \qquad [12]$$

Per quanto riguarda il potenziale $\Omega(z,\vartheta,\Phi)$ la sua espressione analitica risulta (5) essere del tipo

$$\Omega=\Omega_o(\vartheta,\Phi)\frac{(R+z)^2}{R^2} \qquad [13]$$

con Ω_o, valore di Ω al suolo.

Ne consegue che, nella stessa approssimazione che ci ha condotto alle [12], si può porre $\Omega \cong \Omega_o(1+2\tau z)$; la equazione [11] viene ora a scriversi nella forma semplificata, contenente i soli termini di ordine zero e uno nel parametro τ:

$$-\gamma H\frac{\partial^2 \chi}{\partial z^2}+\gamma\left(1-\frac{\partial H}{\partial z}\right)\frac{\partial \chi}{\partial z}$$
$$-\frac{1}{4\omega^2(R+z)^2}F\left[g(1-\gamma)\chi-\gamma\frac{\partial(gH)}{\partial z}\chi\right]+$$
$$+2\tau\left[\chi-3\frac{\partial w}{\partial z}\right]=o \qquad [14]$$

Si constata immediatamente che, per $\tau \to o$, la [14] si identifica con la equazione ottenuta da Pekeris. Nel caso attuale, come si era più sopra rilevato, la nostra equazione [14] contiene un termine in $\tau\dfrac{\partial w}{\partial z}$; tuttavia, poichè nello sviluppo della teoria abbiamo trascurato i termini in τ di ordine superiore al primo, si vede subito che, mediante la [10] nella quale si trascurino i termini $2\dfrac{w}{R+z}$ e $\dfrac{i\sigma}{g}\dfrac{\partial \Omega}{\partial z}$ di primo ordine in τ, la $\dfrac{\partial w}{\partial z}$ può, ugualmente al caso classico, essere eliminata dalla [14] che così assume la forma definitiva:

$$\gamma H\frac{\partial^2 \chi}{\partial z^2}+\gamma\left(\frac{\partial H}{\partial z}-1\right)\frac{\partial \chi}{\partial z}+$$
$$+\frac{1}{4\omega^2(R+z)^2}F\left[g(1-\gamma)\chi-\gamma\frac{\partial(gH)}{\partial z}\chi\right]+$$
$$+2\tau\left[(-3\gamma+2)\chi+3\gamma H\frac{\partial \chi}{\partial z}\right]=o \quad . [15]$$

La [15] può essere risolta per separazione di variabili. Ponendo

$$\left\{\begin{array}{l} \chi = \chi(z)\,\psi(\vartheta, \Phi)\,e^{i\sigma t} \\ \text{con } \psi(\vartheta, \Phi) = \Theta(\vartheta)\,e^{is\Phi} \end{array}\right. \qquad [16]$$

ove s è una costante, e indicando con h la costante di separazione, si ottengono le equazioni finali, rispettivamente nelle variabili z e (ϑ, Φ)

$$\gamma H \frac{d^2\chi}{dz^2} + \gamma\left(\frac{dH}{dz} - 1\right)\frac{d\chi}{dz} + \left[(\gamma-1) + \gamma\frac{dH}{dz}\right]\frac{\chi}{h} + \tau\left[\left(4 - 6\gamma - 2\gamma\frac{H}{h}\right)\chi + 6\gamma H\frac{d\chi}{dz} + 4z\left(1 - \gamma - \gamma\frac{dH}{dz}\right)\frac{\chi}{h}\right] = o \qquad [17]$$

e

$$F(\psi) + 4\frac{R^2\omega^2}{G\,h}\psi = o \qquad [18]$$

La equazione [18], che si ottiene anche nello studio delle oscillazioni libere di un oceano di uniforme profondità, è stata esaurientemente discussa da Laplace ([6]), da Hough ([7]) ([8]) e da altri ricercatori, cosicchè, ove sia necessario, ne assumeremo come note tutte le conseguenze. In particolare ricordiamo che, per ogni determinata coppia di valori dei parametri σ ed s, il periodo di oscillazione è funzione della costante di separazione h. Il caso più interessante è quello per cui $\sigma = s = 2$; in tal caso gli autovalori di h corrispondenti al periodo di 12 ore solari o di 12 ore lunari sono rispettivamente $h = 7{,}9$ e $h = 7{,}1$ km.

La equazione [17], ponendo

$$x(z) = \int_o^z \frac{1 - 6\tau H - \frac{dH}{dz}}{H}\,dz \qquad [19]$$

e

$$\chi(z) = e^{\frac{1}{2}x}\,y(z) \qquad [20]$$

si trasforma in generale nella equazione

$$\frac{d^2y}{dz^2} + \frac{y}{H^2}\left[\frac{H}{h}\left(\frac{\gamma-1}{\gamma} + \frac{dH}{dz}\right) - \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\left(\frac{dH}{dz}\right)^2 - \frac{H}{2}\frac{d^2H}{dz^2}\right] + \tau\frac{y}{H}\left[\frac{4}{\gamma} - 3 - 2\frac{H}{h} - 3\frac{dH}{dz} - \frac{4}{h}\left(\frac{\gamma-1}{\gamma} + \frac{dH}{dz}\right)z\right] = o\,. \qquad [21]$$

Quest'ultima equazione può essere in certi casi, agli effetti della soluzione, più conveniente della [17]; in ogni caso, tramite la [19], si deduce in definitiva la soluzione nella forma $\chi = \chi(z)$. Quanto alle condizioni cui deve soddisfare la soluzione della [21] esse sono una condizione al finito, precisamente che sia

$$w_{z=o} = o \qquad [22]$$

e una condizione all'infinito che andrà precisata di caso in caso, in modo, però, che l'energia associata alla oscillazione rimanga finita o che, da una certa quota in poi, si abbia solo flusso uscente di energia (si può per es. applicare la cosidetta « condizione di radiazione) ».

Una volta risolta la [21], è possibile calcolare le componenti u, v, w della velocità e la oscillazione di pressione p, che possono scriversi nella forma seguente

$$u = \frac{\gamma G h}{4\omega^2(R+z)(f^2 - \cos^2\vartheta)}\,e^{\frac{1}{2}x}\left[\frac{d}{d\vartheta} + \frac{s \operatorname{cotg}\vartheta}{f}\right]\cdot\Theta(\vartheta)\,e^{is\Phi}\,e^{i\sigma t}\cdot \left\{H\frac{dy}{dz} - \frac{y}{2}\left(1 + \frac{dH}{dz}\right) + \tau\left[2H\frac{dy}{dz}(z+2h) + y\left(H - 2h - z - z\frac{dH}{dz} - 2h\frac{dH}{dz}\right) - 6\frac{i\sigma}{G}\Omega\right]\right\} \qquad [23]$$

$$v = i \frac{\gamma G h}{4\omega^2 (R+z)\,(f^2-\cos^2\vartheta)}\, e^{\frac{1}{2}x} \left[\frac{\cos\vartheta}{f} \frac{d}{d\vartheta} + \frac{s}{\operatorname{sen}\vartheta} \right] \cdot \Theta(\vartheta)\, e^{is\Phi}\, e^{i\sigma t} \cdot$$

$$\cdot \left\{ H \frac{dy}{dz} - \frac{y}{2}\left(1 + \frac{dH}{dz}\right) + \tau \left[2H \frac{dy}{dz}(2+zh) + y\left(H - 2h - z - z\frac{dH}{dz} - 2h\frac{dH}{dz}\right) - 6\frac{i\sigma}{G}\Omega \right] \right\} \qquad [24]$$

$$w = \left\{ -\frac{i\sigma}{G}\,\Omega\,(1 + 2\tau z + 6h\tau) + \gamma h\, e^{\frac{1}{2}x} \left[H \frac{dy}{dz} + y\left(\frac{H}{h} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\frac{dH}{dz}\right)\right] \right.$$

$$\left. + \gamma h e^{\frac{1}{2}x}\, \tau \left[4H\,(h + 2z)\frac{dy}{dz} + y\left(H - 2h - 2z - 2z\frac{dH}{dz} - 2h\frac{dH}{dz}\right)\right] \right\} \cdot$$

$$\cdot\, \Theta(\vartheta)\, e^{is\Phi}\, e^{i\sigma t} \qquad [25]$$

$$p = \varrho_0 \left\{ -\Omega\,(1 + 6h\tau) + \gamma \frac{Gh}{i\sigma}\, e^{\frac{1}{2}x} \left[H\frac{dy}{dz} - \frac{y}{2}\left(1 + \frac{dH}{dz}\right)\right] \right.$$

$$\left. + \gamma\frac{Gh}{i\sigma}\, e^{\frac{1}{2}x}\, \tau \left[2H\frac{dy}{dz}(z + 2h) + y\left(H - 2h - z - z\frac{dH}{dz} - 2h\frac{dH}{dz}\right)\right]\right\} \cdot$$

$$\cdot\, \Theta(\vartheta)\, e^{is\Phi}\, e^{i\sigma t} \qquad [26]$$

Paragrafo 2. Applicazione al caso particolare $H =$ costante.

La soluzione della equazione [21] nel caso generale in cui sia $H = H(z)$ non risulta esprimibile in termini finiti; si riconosce subito però che ciò è possibile nel caso particolare $H =$ costante. Allora infatti la [21] può trasformarsi nella forma

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \mu^2(x)\, y = o \qquad [27]$$

ove si è posto

$$\mu^2(x) = \left[\left(\frac{H}{h}\frac{\gamma - 1}{\gamma} - \frac{1}{4} \right) \frac{1}{(1 - 6\tau H)^2} - \alpha - \beta x \right] \qquad [28]$$

con

$$x = \frac{1 - 6\tau H}{H}\, z$$

$$\alpha = \left(-\frac{4}{\gamma} + 3 + 2\frac{H}{h} \right) \frac{\tau H}{(1 - 6\tau H)^2}$$

$$\beta = 4\,\frac{H}{h}\,\frac{\gamma - 1}{\gamma}\,\frac{\tau H}{(1 - 6\tau H)^3}$$

La [27] è risolubile in termini di funzioni di Bessel di ordine $\pm 1/3$; infatti, con il cambiamento di variabile

$$\xi = \left[\left(\frac{H}{h}\frac{\gamma - 1}{\gamma} - \frac{1}{4} \right) \frac{1}{(1 - 6\tau H)^2} - \alpha - \beta x \right] \qquad [29]$$

la [27] si trasforma in

$$\frac{d^2 y}{d\xi^2} + \left(-\frac{1}{\beta} \right)^2 \xi\, y = o \qquad [30]$$

il cui integrale generale, con A e B costanti arbitrarie, è

$$y(\xi) = \xi^{1/2} \left[A\, J_{1/3}\left(-\frac{2}{3\beta}\, \xi^{3/2} \right) + B\, J_{-1/3}\left(-\frac{2}{3\beta}\, \xi^{3/2} \right) \right] \qquad [31]$$

ove J_p, in generale, è la funzione di Bessel di I specie, di ordine p. Per la determinazione di A e B osserviamo che al crescere della quota z la ξ tende a $-\infty$, e quindi l'argomento delle $J_{1/3}$ e $J_{-1/3}$ diviene immaginario; allora la J_p può essere sostituita vantaggiosamente dalla funzione di Bessel modificata $I_p(\eta) = i^{-p} J_p(i\eta)$; ma l'espressione asintotica della I_p per $\eta \to \infty$ contiene due termini l'uno in $e^{-\eta}$ e l'altro in $e^{+\eta}$ per cui, imponendo alla y la condizione (condizione all'infinito) di restare sempre finita, risulta tra A e B il legame

$$A\, i^{1/3} + B\, i^{-1/3} = o \qquad [32]$$

da cui $B = -A\, i^{2/3}$ così da avere l'espressione

$$y(\xi) = A\, \xi^{1/2} \left[J_{1/3}\left(-\frac{2}{3\beta}\, \xi^{3/2}\right) - i^{2/3} J_{-1/3}\left(-\frac{2}{3\beta}\, \xi^{3/2}\right) \right] \qquad [33]$$

che può anche essere espressa, ai fini del calcolo numerico, mediante la funzione di Airy.

Prima di procedere cercheremo di valutare l'ordine di grandezza del coefficiente moltiplicativo $\mu^2(x)$ della y nella [27], con particolare riguardo alle differenze tra il caso più generale da noi studiato e il caso particolare di Wilkes. In questo ultimo caso il suddetto coefficiente ha l'espressione $\mu^2 = \frac{H}{h} \frac{\gamma - 1}{\gamma} - \frac{1}{4}$ e, pertanto, per H cost, anche μ non dipende dalla quota; a seconda che sia $\mu^2 > o$ oppure $\mu^2 = -\lambda^2 < o$ le soluzioni sono $e^{\pm i\mu x}$ ovvero $e^{\pm \lambda x}$. Nel nostro caso, con $R = 6370$ km e assumendo per es. $H/h = 1$, $h = 7{,}9$ km, $\gamma = 1{,}40$ risulta rispettivamente

$$\left(\frac{H}{h} \frac{\gamma - 1}{\gamma} - \frac{1}{4}\right) \frac{1}{(1 - 6\tau H)^2} = 0{,}03625;$$

$$\alpha = 0{,}00268; \qquad \beta = 0{,}00145\,.$$

Si vede allora chiaramente che l'importanza dei termini correttivi può essere rilevante così da far ritenere necessaria la loro considerazione, sia al suolo, sia anche, maggiormente, al crescere della quota, agli effetti della determinazione della funzione $y(x)$ e quindi delle grandezze da essa dipendenti.

Tra queste la più importante è la variazione p della pressione al suolo per la quale, come risulta dalla esperienza, lo spettro di ampiezza al variare del parametro h deve presentare una notevole risonanza per $h = 7{,}9$, cui corrisponde il periodo $T = 12$ ore solari.

È ben noto che una atmosfera in cui sia H costante non risponde alla realtà; tuttavia la considerazione di un modello di atmosfera più aderente alle effettive condizioni fisiche porta a notevole complicazione di calcolo per la complessità della equazione [17]. D'altra parte, il caso $H = $ cost., pur nella sua notevole schematizzazione, è importante: *a*) perchè consente di valutare approssimativamente quanto e come l'effettivo spettro di ampiezza delle oscillazioni può differire da quello considerato nel caso da Wilkes; *b*) perchè, quale che sia lo schema di atmosfera usato, una zona in cui sia $H = $ cost. può *sempre* essere vantaggiosamente supposta immediatamente al disotto della regione atmosferica in cui diviene sensibile l'assorbimento della energia trasportata verso l'alto dalle oscillazioni di marea.

Conviene notare che nel nostro caso l'assunzione $H = $ cost. non equivale, come nel caso di Wilkes, all'altra di temperatura T costante; nelle nostre ipotesi, evidentemente, T risulta proporzionale a g e quindi, con sufficiente approssimazione, si può ritenere essere grad $T \propto -2\tau = $ cost.

Cominciamo col determinare l'ampiezza di oscillazione al suolo; a partire dalla espressione [5] in w e p si deduce subito

$$p_{z=o} = i\, p_G \frac{\gamma}{\sigma}\, y_o \qquad [34]$$

cioè, anche, chiamando $p_{eq} = -\frac{\Omega p_G}{\sigma H}$ la cosidetta marea di equilibrio (« equilibrium tide ») e dopo aver determinato la costante di integrazione A imponendo la condizione [22],

$$p = p_{eq} \frac{H}{h} \frac{(1 + 6\tau h)\left(J^o_{1/3} - i^{2/3} J^o_{-1/3}\right)}{\left[\left(\frac{H}{h} - \frac{1}{2} + \tau H - 2\tau h\right)\left(J^o_{1/3} - i^{2/3} J^o_{-1/3}\right) + (1 + 4\tau h - 6\tau H)\left(J^o_{-2/3} + i^{2/3} J^o_{2/3}\right) \xi_o^{1/2}\right]} \qquad [35]$$

ove ξ_o e J^o_p indicano rispettivamente i valori di ξ e di J_p in corrispondenza a $z = o$.

Il fattore moltiplicativo di p_{eq}, detto fattore di amplificazione, in generale è espresso da un numero complesso, cosicchè, indicandone rispettivamente con Q e φ il modulo e la fase, si è posto

$$p_{z=o} = p_{eq} \cdot Q\, e^{i\varphi} \qquad [36]$$

In fig. 1 sono riportati i due andamenti di ln Q (curve A A), dedotti l'uno (linea continua) dalla [35] e l'altro (linea tratteggiata) dalla analoga formula per il caso di Wilkes, per il caso $H = 8$ km; sulle ascisse viene riportata la variabile h oltrechè il periodo T di risonanza dell'atmosfera in corrispondenza a ciascun valore di h; appare chiaramente che la differenza principale consiste in un aumento dell'ordine di qualche minuto del periodo T, nel caso da noi considerato.

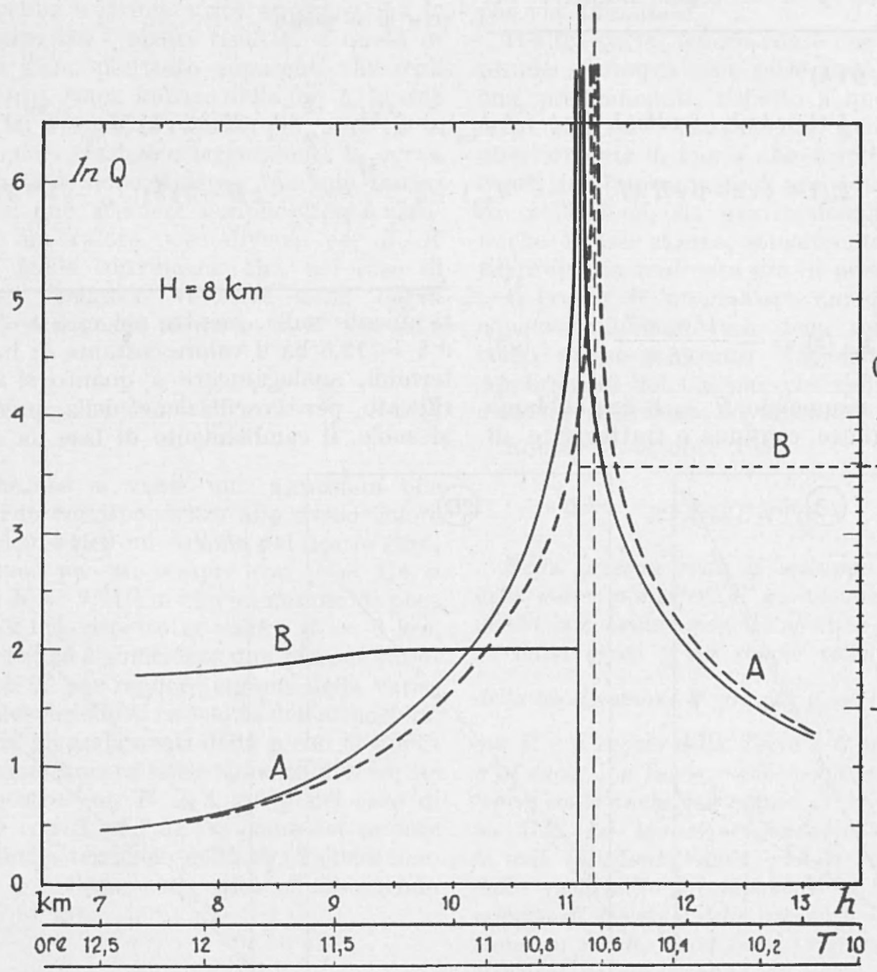

Fig. 1

Ben rilevabili sono le differenze percentuali di ampiezza di una notevole banda spettrale press'a poco corrispondente all'intervallo $9 < h < 13$ ovvero $10^h < T < 11{,}5^h$. Quanto poi alla fase φ (curva B B), essa non differisce sensibilmente nei due casi; essa passa da o a π, rispettivamente, a sinistra e a destra del valore h^* di h (diverso però nei due casi) per cui si ha la risonanza (in altri termini la oscillazione di pressione p è di segno opposto dalle due parti di h^*); ne consegue che, in corrispondenza all'intervallo di h compreso tra i due valori h^* l'oscillazione p è di segno negativo nel nostro caso ed invece positivo nel caso di Wilkes.

Vogliamo ora vedere, sempre nell'ipotesi H = cost, come la p varia con la quota z; si può ancora scrivere

$$p\,(z) = p_{eq}\,(z) \cdot Q\, e^{i\varphi} \qquad [37]$$

ove si è posto

$$Q\, e^{i\varphi} = (1 + 6\tau h) \cdot \left[1 - e^{1/2\, x} \frac{\xi\,(1 + 4\tau h - 6\tau H)(J_{-2/3} + i^{2/3} J_{2/3}) + \xi^{1/2}\left(-\frac{1}{2} + \tau H - 2\tau h\right)(J_{1/3} - i^{2/3} J_{-1/3})}{\xi_0 (1 + 4\tau h - 6\tau H)(J^o_{-2/3} + i^{2/3} J^o_{2/3}) + \xi_0^{1/2}\left(\frac{H}{h} - \frac{1}{2} + \tau H - 2\tau h\right)(J^o_{1/3} - i^{2/3} J^o_{-1/3})} \right] \qquad [38]$$

e

$$p_{eq}\,(z) = -\frac{\Omega\, p_G\, e^{-x}}{H\, G} \qquad [39]$$

Sempre assumendo H = 8 km abbiamo calcolato (linee continue e tratteggiate di

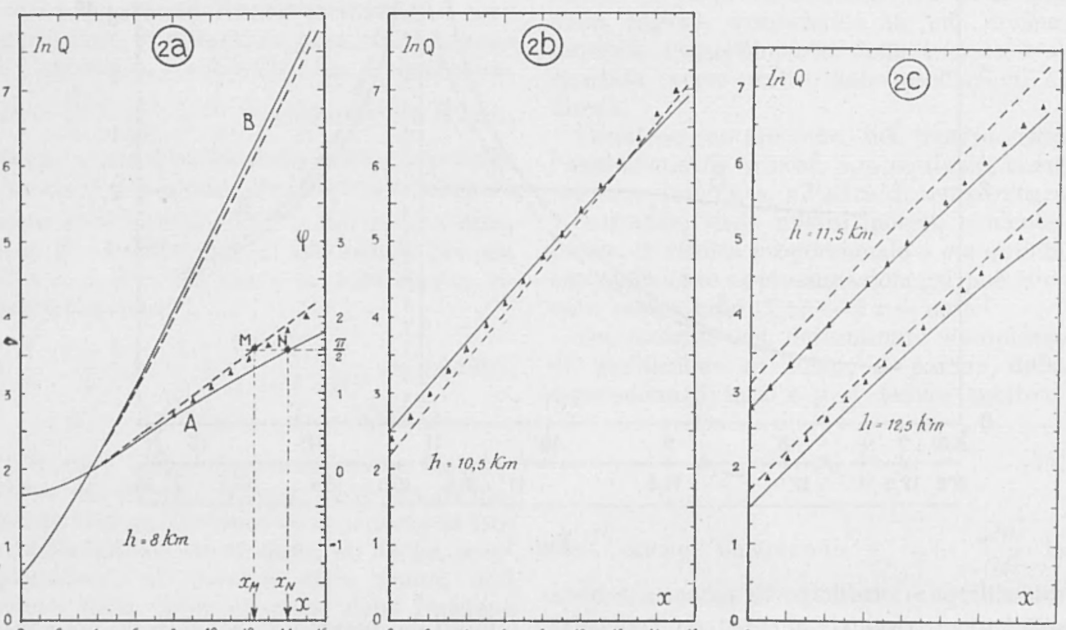

Fig. 2. – Le linee continue si riferiscono al nostro caso; quelle tratteggiate e i punti al caso di Wilkes.

fig. 2) gli andamenti di ln Q e di φ con la quota in vari casi: la fase φ varia effettivamente con la quota nel solo caso h = 8 km; nel caso h = 10,5 invece essa è identicamente nulla, mentre nei casi h = 11,5 e h = 12,5 ha il valore costante π: in altri termini, analogamente a quanto si è già rilevato per l'oscillazione della pressione al suolo, il cambiamento di fase da o a π al crescere di h, cioè il cambiamento di segno di p da positivo a negativo si ha in corrispondenza a quel valore di h per cui l'atmosfera risuona. Assai interessante il caso $h = 8$ km, in quanto appare chiaramente una sensibile differenza di circa 15 km nelle quote z_N (x_N) e z_M (x_M) a cui, rispettivamente nel caso nostro e in quello di Wilkes, la oscillazione p cambia di segno rispetto alla oscillazione al suolo.

Potrebbe a prima vista apparire che le differenze tra i nostri risultati e quelli di Wilkes siano piuttosto apparenti che reali in quanto, come appare dalla fig. 1, le due curve di risonanza vanno più o meno a sovrapporsi traslando leggermente la curva tratteggiata verso sinistra: ma tale traslazione si può ottenere semplicemente assumendo un valore poco diverso per H. È infatti facile convincersi che, nel caso di Wilkes, l'asintoto verticale della curva $\ln Q(h)$ corrisponde al valore di h^* per cui è

$$\frac{H}{h^*} = 1 - \frac{\gamma - 1}{\gamma} = \frac{1}{\gamma} \quad [40]$$

cosicchè, se si vuole una atmosfera che risuoni in corrispondenza allo stesso valore $h = 11{,}074$ per cui risuona nel nostro caso, si deduce per H, sempre con $\gamma = 1{,}4$, il valore $H = 7{,}91$ km che è inferiore di poco più dell'1% rispetto al valore $H = 8$ km. In effetti, se è sufficiente una piccola variazione di H per rendere ragione della variazione del periodo di risonanza dell'atmosfera, tuttavia gli andamenti della p con la quota rimangono ancora notevolmente diversi nel caso nostro con $H = 8$ km e nel caso di Wilkes con $H = 7{,}91$ km come ben appare dai punti a triangolo della fig. 2 che danno $\ln Q$ e φ nei vari casi, calcolati assumendo $H = 7{,}91$ km.

Paragrafo 3. Conclusioni.

I risultati sopra esposti, sebbene ottenuti in un limitato numero di casi e con uno schema di atmosfera del tutto ipotetico, sono tuttavia incoraggianti in quanto la considerazione di una atmosfera rispondente alle nostre conoscenze porterà a differenze quantitative più o meno notevoli senza presumibilmente alterare qualitativamente le nostre conclusioni. Le differenze percentuali nelle ampiezze di oscillazione e nella loro fase tra il caso nostro e quello in cui si trascura la variabilità con la quota dell'accelerazione di gravità $g(z)$ e del raggio vettore $R + z$ possono giungere anche al $20 \div 30\%$. La risoluzione delle equazioni fondamentali nel caso in cui H sia funzione della quota z in generale è possibile solo per via numerica.

D'altra parte, tenuto conto che gli effetti termici di marea sono pure assai rilevanti, anzi predominanti, rispetto a quelli gravitazionali, sarà conveniente generalizzare ulteriormente la teoria allo scopo di tenere conto simultaneamente di ambedue le cause di oscillazione, sia gravitazionali sia termiche. Di tale ricerca, attualmente in corso, riferiremo in una nota ora in preparazione.

Il lavoro di integrazione numerica delle equazioni fondamentali della teoria è in corso presso l'Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo, che qui fin d'ora desidero ringraziare vivamente.

Roma, 21 ottobre 1957

RIASSUNTO

Nella presente nota si sviluppa la teoria delle maree atmosferiche gravitazionali prendendo in considerazione la effettiva dipendenza dalla quota z del raggio vettore $R + z$ *e della accelerazione di gravità* $g = G \dfrac{R^2}{(R+z)^2}$ *ove R è il raggio della Terra e G il valore di g al suolo. La teoria viene svolta in modo da tenere conto anche dei termini di primo ordine in* $1/R$. *La equazione fondamentale in z, la cui soluzione regola poi la dipendenza dalla quota delle 3 componenti u, v, w della velocità di marea e della oscillazione di pressione p, risulta modificata, rispetto al caso classico, da un termine di entità apprezzabile, sufficiente ad alterare sensibilmente la forma analitica della soluzione stessa. Si applica la teoria al caso di una atmosfera in cui la scala delle altezze H non dipende dalla quota e si mostrano vari significativi risultati numerici.*

ABSTRACT

In this paper we work the theory of the gravitational tides in the atmosphere, assuming the exact height dependence of the radius

vector $R + z$ and of the gravity acceleration $g(z) = G \dfrac{R^2}{(R+z)^2}$ *(z is the height on the ground, R is the Eearth's radius and G is the ground value of g).*

In the theory we consider also the terms of first order in 1/R. The fundamental equation, whose solution is responsible of the height variation of the velocity components, u, v, w and of the pressure oscillation p, is modified, with respect to the «classical» theory, by the presence of a term which appreciably affects the analytical form of the solution itself; also the analytical form of the above variables is thus appreciably modified.

We apply the theory to an atmosphere having a constant scale height H and show some interesting numerical results.

Further generalization to the general case of thermal and gravitational oscillations is now in progress.

BIBLIOGRAFIA

(1) Pekeris, C. L., *Proc. Roy. Soc.*, **158**, 650, (1937).

(2) Weekes, K. - Wilkes, M. V., *Proc. Roy. Soc.*, **192**, 80, (1948).

(3) Wilkes, M. V., *Oscillations of the Earth's Atmosphere*, Cambridge 1949.

(4) Lamb, H., *Hydrodinamics*, pag. 331, Cambridge 1932.

(5) — *Hydrodinamics*, pag. 358, Cambridge 1932.

(6) Laplace, P. S., *Mecanique celeste*, **5**, 149, (Paris 1823).

(7) Hough, S. S., *Philos. Trans.*, **189**, 201, (1897).

(8) — *Philos. Trans.*, **191**, 139, (1898).